Aufg. 1

Char. Kurven: $\begin{cases} \vec{x}'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ \vec{x}(0) = \begin{pmatrix} s \\ -s \end{pmatrix} \end{cases}$

$$\Rightarrow \vec{x}(t;s) = \begin{pmatrix} s \\ -s \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s+t \\ -s+2t \end{pmatrix}$$

Lösen von $\begin{cases} u'(t) = \sin(-s+2t) \\ u(0) = 0 \end{cases}$ liefert

$$u(t) = \frac{1}{2}\left(\cos(-s) - \cos(-s+2t)\right)$$

Koordinatentransformation:

$$\begin{aligned} x_1 &= s+t \\ x_2 &= -s+2t \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} t &= \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 \\ s &= \frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow u(x_1,x_2) = \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{1}{3}x_2 - \frac{2}{3}x_1\right) - \cos\left(x_2\right)\right)$$

Aufg. 2

a) $\vec{x} \cdot \nabla(x_1 + c) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = x_1$

b) $\begin{cases} \vec{x} \cdot \nabla u(\vec{x}) = x_1 \\ u(\omega) = 0 \quad \text{für } |\omega| = 1 \end{cases}$

Char. Kurven: $\begin{cases} \vec{x}\,'(t) = \vec{x}(t) \\ \vec{x}(0) = \omega \end{cases}$

$\Rightarrow \vec{x}(t) = \omega e^t$

Lösen von $\begin{cases} U'(t) = \omega_1 e^t \\ U(0) = 0 \end{cases}$ liefert

$U(t) = \omega_1 (e^t - 1)$

Koordinatentransformation:

$\vec{x} = \omega e^t$ mit $|\omega| = 1$

$\Rightarrow |\vec{x}| = e^t \rightsquigarrow t = \ln(|\vec{x}|)$ (für $\vec{x} \neq 0$)

$\Rightarrow \omega = \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}$

$u(\vec{x}) = \frac{x_1}{|\vec{x}|}(|\vec{x}| - 1) = x_1 - \frac{x_1}{|\vec{x}|}$

c) max. definiert auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

Aufg. 3

a)
$$\begin{cases} x_1' = x_1 - x_2 \\ x_2' = 1 - x_2 \\ U' = x_2 + U \end{cases}$$
$$\begin{cases} x_1(0) = s \\ x_2(0) = 0 \\ U(0) = \sin(s) \end{cases} \quad \text{mit } s \in \mathbb{R}$$

b) Lösen von $\begin{cases} x_2' = 1 - x_2 \\ x_2(0) = 0 \end{cases}$

Ansatz $x_2(t) = e^{-t} g(t) \overset{\text{Abl.}}{\rightsquigarrow} 1 - e^{-t} g(t) = x_2'(t) = -e^{-t} g(t) + e^{-t} g'(t)$

$$\Rightarrow 1 = e^{-t} g'(t)$$
$$\Rightarrow g(t) = e^{t} + C$$

$$0 = x_2(0) = e^0 g(0) = 1 + C$$
$$\Rightarrow x_2(t) = 1 - e^{-t}$$

Analog löst man $\begin{cases} x_1' = x_1 - 1 + e^{-t} \\ x_1(0) = s \end{cases}$ und $\begin{cases} U' = U + 1 - e^{-t} \\ U(0) = \sin(s) \end{cases}$

$$\rightsquigarrow x_1(t) = \left(s - \tfrac{1}{2}\right) e^{t} - \frac{e^{-t}}{2} + 1$$
$$U(t) = \left(\sin(s) + \tfrac{1}{2}\right) e^{t} + \frac{e^{-t}}{2} - 1$$

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \left(s - \tfrac{1}{2}\right) e^{t} - \tfrac{e^{-t}}{2} + 1 \\ x_2 &= 1 - e^{-t} \end{aligned}\right\} \Rightarrow t = -\ln(1 - x_2) \text{ für } x_2 < 1 \quad \Rightarrow s = \frac{1}{2} + \left(x_1 - \frac{x_2}{2} - \frac{1}{2}\right)(1 - x_2)$$

$$\Rightarrow u(x_1, x_2) = \frac{\sin\left(\frac{1}{2} + \left(x_1 - \frac{x_2}{2} - \frac{1}{2}\right)(1 - x_2)\right) + \frac{1}{2}}{1 - x_2} + \frac{1 - x_2}{2} - 1$$

Die Lsg. ist auf $\mathbb{R} \times (-\infty, 1)$ definiert.

Aufg. 4

a) Sei $s>0$ bel., aber fest.

Sei weiter $K = \max_{t\in[0,s]} M(t)$, dann gilt

$$u(x,t) = u_t(x,t) = 0 \qquad \forall t\in(0,s),\ |x|\geq K$$

Zudem sind beide Funktionen stetig, also findet man eine integrierbare Majorante, so dass man Ableitung und Integral vertauschen darf. Für $t\in(0,s)$ gilt also

$$\frac{d}{dt}\left(\int_{\mathbb{R}} u(x,t)dx\right) = \int_{\mathbb{R}} u_t(x,t)\,dx = \int_{-K}^{K} u_t(x,t)\,dx$$

$$= -\int_{-K}^{K} F(u(x,t))_x\,dx = -F(u(K,t)) + F(u(-K,t)) = 0$$

Da s bel. war, folgt die Behauptung.

b) u schwache Lsg., d.h.

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} (u(x,t)\varphi_t + F(u)\varphi_x)\,dx\,dt + \int_{\mathbb{R}} u_0(x)\varphi(x,0) = 0 \qquad \forall \varphi\in C_c^\infty(\mathbb{R}\times[0,\infty))$$

Wir werden eine Folge φ_ε von Testfkt. konstruieren, so dass für $\varepsilon\to 0$ das erste Integral gegen $-\int_{\mathbb{R}} u(s,x)\,dx$ konvergiert.

Sei also wieder $s>0$ bel. und $K = \max_{t\in[0,s+1]} M(t)$

Man kann ohne Einschränkung annehmen, dass $F(0)=0$.
(sonst betrachte $\hat{F}(u) = F(u) - F(0)$)

Für $(x,t) \in [-K,K] \times [0,s]$ setze $\varphi^\varepsilon(x,t) = 1$.

Insb. gilt dort auch $\varphi_t^\varepsilon = \varphi_x^\varepsilon = 0$

Konstruktion für $t > s$:

Sei $\psi \in C_0^\infty((0,\infty))$ mit $\int_0^\infty \psi(\tau)\, d\tau = 1$

und setze $\varphi^\varepsilon(x,t) = \int_t^\infty \varepsilon^{-1} \psi\left(\frac{\tau - s}{\varepsilon}\right) d\tau$ für $(x,t) \in [-K,K] \times [s,\infty)$.

Das passt, da $\varphi^\varepsilon(x,s) = \int_0^\infty \psi(z)\, dz = 1$,

$\frac{d^n \varphi^\varepsilon}{dt^n}(x,s) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ und $\frac{d^n \varphi^\varepsilon}{dt^n}(x,T) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ für $T > 0$ groß

Zudem gilt

$$\left.\begin{aligned} \varphi_t^\varepsilon(x,t) &= -\varepsilon^{-1} \psi\left(\frac{t-s}{\varepsilon}\right) \\ \varphi_x^\varepsilon(x,t) &= 0 \end{aligned}\right. \quad \text{für } (x,t) \in [-K,K] \times [s,\infty)$$

Nach Aufg. 2 von Blatt 3 gilt

$$\int_s^\infty u(x,t)\, \varepsilon^{-1} \psi\left(\frac{t-s}{\varepsilon}\right) dt \xrightarrow{\varepsilon \to 0} u(x,s) \text{ glm.}$$

Insgesamt erhalten wir

$$0 = \int_{-\infty}^\infty \int_0^\infty \left(u \varphi_t^\varepsilon + F(u) \varphi_x^\varepsilon\right) dt\, dx + \int_{-\infty}^\infty u_0(x) \varphi^\varepsilon(x,0)\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^\infty \int_s^\infty u(x,t) \varphi_t^\varepsilon(t,x)\, dt\, dx + \int_{-\infty}^\infty u_0(x)\, dx$$

$$\xrightarrow{\varepsilon \to 0} -\int_{-\infty}^\infty u(x,s)\, dx + \int_{-\infty}^\infty u_0(x)\, dx \quad \Rightarrow \text{Beh.}$$

$\square$

Aufg. 5

Es ist eine quasi-lineare Gleichung und das zugehörige System ist

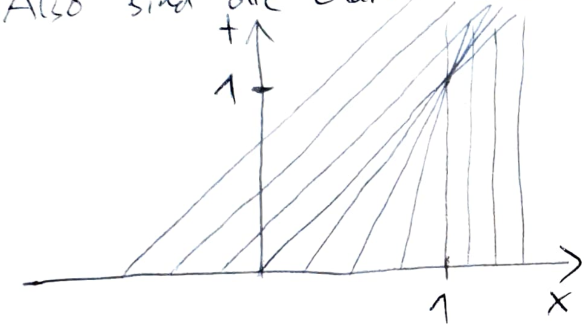
$$\begin{cases} x'(\tau) = U(\tau) \\ t'(\tau) = 1 \\ U'(\tau) = 0 \\ x(0) = s \\ t(0) = 0 \\ U(0) = u_0(s) \end{cases} \quad \text{für } s \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow U(\tau) = u_0(s) \quad \forall \tau > 0$

$$\Rightarrow x(\tau) = x(0) + \int_0^\tau x'(z)\,dz = s + \tau u_0(s)$$

und $t(\tau) = \tau$

Also sind die char. Kurven durch $t \mapsto (s + t u_0(s), t)$ gegeben



$$u_0(s) = \begin{cases} 1 & s \leq 0 \\ 1-s & 0 \leq s \leq 1 \\ 0 & s \geq 1 \end{cases}$$

Die Kurven schneiden sich bei $t = 1$ und es entsteht ein Schock (eine Stoßwelle)

Physikalisch relevante Lösungen sind konstant entlang der Charakt. Kurven

Für $0 \leq t < 1$ und $t < x < 1$ gilt

$$x = s + t u_0(s) = s + t(1-s) \Rightarrow s = \frac{x-t}{1-t}$$

Für $t \in [0,1)$ gilt also

$$u(x,t) = \begin{cases} 1 & , 0 \leq t < 1, \ x \leq t \\ \frac{1-x}{1-t} & , 0 \leq t < 1, \ t < x < 1 \\ 0 & , 0 \leq t < 1, \ x \geq 1 \end{cases}$$

Für $t \geq 1$ verwenden wir die Rankine - Hugoniot - Bed.:

Hier ist $F(u) = \frac{1}{2} u^2$, also

$$v_S = \frac{\frac{1}{2} u_\ell^2 - \frac{1}{2} u_r^2}{u_\ell - u_r} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 1^2 - 0}{1 - 0} = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$ die Unstetigkeitskurve ist parametrisiert durch

$$\underset{\in [0,\infty)}{\tau} \mapsto S(\tau) = (1,1) + \left(\frac{1}{2}\tau, \tau\right) \underset{\tau = t-1}{\overset{}{=}} \left(\frac{1}{2} + \frac{t}{2}, t\right) \quad \text{mit } t \in [1,\infty)$$

$$\Rightarrow u(x,t) = \begin{cases} 1, & t \geq 1, x < \frac{1+t}{2} \\ 0, & t \geq 1, x > \frac{1+t}{2} \end{cases}$$