1 a) Char. Kurven $\begin{cases} \vec{x}'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ \vec{x}(0) = \begin{pmatrix} s \\ s \end{pmatrix} \end{cases}$

$$\Rightarrow \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} s+t \\ s+2t \end{pmatrix}$$

Lösen von $\begin{cases} u'(t) = 2(s+t) - (s+2t) - u(t) = s - u(t) \\ u(0) = \sin(s) \end{cases}$

liefert $u(t) = s + Ce^{-t} = s + (\sin(s) - s)e^{-t}$

Koordinatentransformation

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= s+t \\ x_2 &= s+2t \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} s = 2x_1 - x_2 \\ t = x_2 - x_1 \end{cases}$$

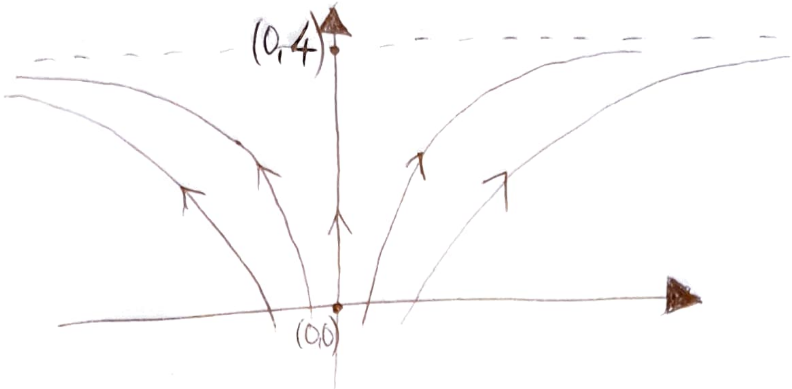
$$\Rightarrow u(x_1, x_2) = 2x_1 - x_2 + (\sin(2x_1 - x_2) - 2x_1 + x_2)\, e^{x_1 - x_2}$$

b) Entlang der char. Kurven parametrisiert durch $\vec{x}(t;s) = \begin{pmatrix} s+t \\ s+2t \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$ wird die PDGL zur GDGL, nämlich $u'(t) = s - u(t)$. Diese ist linear und hat Existenzintervall $\mathbb{R}$.

Da diese char. Kurven für alle $s \in \mathbb{R}$ die ganze Ebene $\mathbb{R}^2$ überdecken, ist die Lösung somit überall bestimmt.

② a) Char. Kurven
$$\begin{cases} \vec{x}\,'(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ 4 - x_2(t) \end{pmatrix} \\ \vec{x}(0) = \begin{pmatrix} s \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{X}(t;s) = \begin{pmatrix} s\, e^{t} \\ 4 - 4e^{-t} \end{pmatrix}$$



Da man
$$\begin{cases} x_1 = s e^{t} \\ x_2 = 4 - 4e^{-t} \end{cases}$$
für alle $(x_1, x_2) \in \mathbb{R} \times (-\infty, 4)$

eind. lösen kann, füllen die char. Kurven parametr. durch $\vec{x}(t;s)$ mit $t, s \in \mathbb{R}$ ganz $\mathbb{R} \times (-\infty, 4)$. Entlang dieser Kurven wird die PDGL zur linearen GDGL

$$u'(t) = s e^{t} - (4 - 4e^{-t})\, u(t), \qquad u(0) = \sin(s)$$

und ist somit eindeutig und global lösbar.

b) siehe a)

c) Zuerst löst man obige DGL für $s = 0$ $\rightsquigarrow u' = (4e^{-t} - 4)u$, $u(0) = 0$

$\Rightarrow u \equiv 0 \quad \Rightarrow u(0, x_2) = 0$ für $x_2 \in [0, 4]$

Die Halbgeraden $\{(x_1, 4) : x_1 \geq 0\}$ und $\{(x_1, 4) : x_1 \leq 0\}$ sind char. Kurven. Hier ergibt sich die Gleichung

$$\begin{cases} x_1\, u'(x_1) = x_1 - 4u(x_1) \\ u(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow u(x_1) = \frac{1}{5} x_1 + C x_1^{-4}$$
$$\Rightarrow C = 0$$

$$\Rightarrow u(x_1, 4) = \frac{1}{5} x_1$$

3

$$\begin{pmatrix} u \\ -u \end{pmatrix} \cdot \nabla u = y - x, \qquad u(1,s) = s^2$$

a)
$$\begin{cases} X' = U, & X(0) = 1 \\ Y' = -U, & Y(0) = s \\ U' = Y - X, & U(0) = s^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow U'' = Y' - X' = -2U \quad \Rightarrow U(t) = C_1 \sin(\sqrt{2}t) + C_2 \cos(\sqrt{2}t)$$

Zudem $\quad s^2 = U(0) = C_2$

und $\quad s - 1 = Y(0) - X(0) = U'(0) = \sqrt{2} C_1$

$$\Rightarrow U(t) = \frac{s-1}{\sqrt{2}} \sin(\sqrt{2}t) + s^2 \cos(\sqrt{2}t)$$

$$\Rightarrow X(t) = -\frac{s-1}{2} \cos(\sqrt{2}t) + \frac{s^2}{\sqrt{2}} \sin(\sqrt{2}t) + C_3$$

$$\overset{X(0)=1}{=} -\frac{s-1}{2} \cos(\sqrt{2}t) + \frac{s^2}{\sqrt{2}} \sin(\sqrt{2}t) + \frac{s+1}{2}$$

$$Y(t) = \frac{s-1}{2} \cos(\sqrt{2}t) - \frac{s^2}{\sqrt{2}} \sin(\sqrt{2}t) + \frac{s+1}{2}$$

b) Es gilt
$$2X(t)Y(t) = -\left(\frac{s-1}{\sqrt{2}} \cos(\sqrt{2}t) - s^2 \sin(\sqrt{2}t)\right)^2 + \frac{(s+1)^2}{2}$$

und somit
$$U(t)^2 - 2X(t)Y(t) = \left(\frac{s-1}{\sqrt{2}} \sin(\sqrt{2}t) + s^2 \cos(\sqrt{2}t)\right)^2 + \left(\frac{s-1}{\sqrt{2}} \cos(\sqrt{2}t) - s^2 \sin(\sqrt{2}t)\right)^2 - \frac{(s+1)^2}{2}$$

$$\overset{\cos^2 + \sin^2 = 1}{=} \frac{(s-1)^2}{2} + s^4 - \frac{(s+1)^2}{2}$$

$$= s^4 - 2s$$

c) Es gilt

$$U(t) = \pm\sqrt{2X(t)Y(t) + s^4 - 2s}$$

Wegen $U(0) = s^2 \geq 0$ muss die positive Wurzel genommen werden.

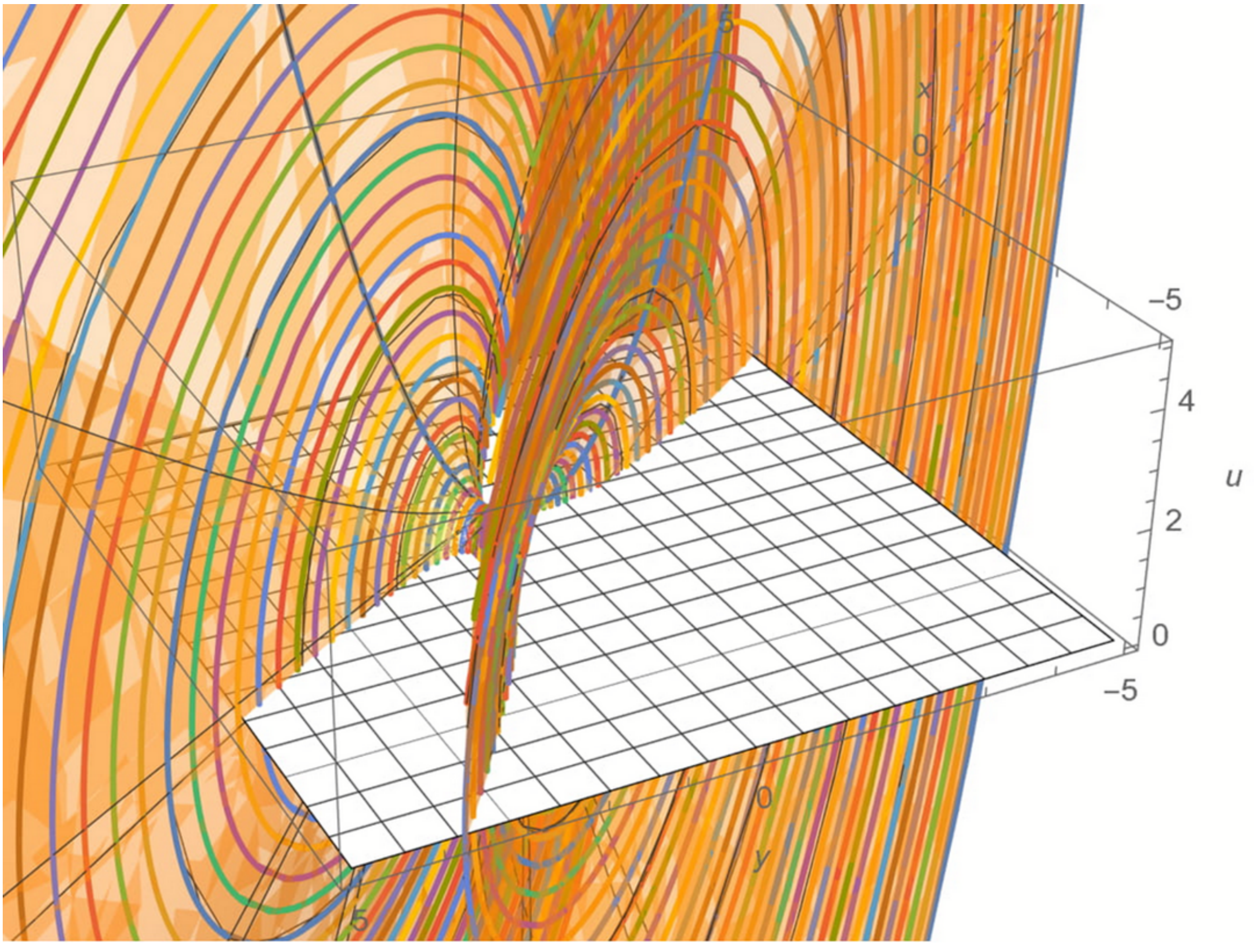
Weiterhin folgt aus dem char. System

$$X(t) + Y(t) = s+1$$

$$\Rightarrow U(t) = \sqrt{2X(t)Y(t) + (X(t)+Y(t)-1)^4 - 2(X(t)+Y(t)-1)}$$

Also ist die gesuchte Lösung

$$u(x,y) = \sqrt{2xy + (x+y-1)^4 - 2(x+y-1)}$$



(4) a) & b) $\begin{cases} X'(t) = X(t) - 2Y(t)\,U(t) \\ Y'(t) = Y(t) + 2X(t)\,U(t) \\ U'(t) = -\frac{1}{2}\,U(t) \end{cases}$

Mit Polarkoord. $(X(t), Y(t)) = (R(t)\cos(\phi(t)), R(t)\sin(\phi(t)))$

ergibt sich

$$R'\cos(\phi) - R\sin(\phi)\,\phi' = R\cos(\phi) - 2R\sin(\phi)\,U \qquad (*)$$

$$R\sin(\phi) + R\cos(\phi)\,\phi' = R\sin(\phi) + 2R\cos(\phi)\,U \qquad (**)$$

Daraus folgt mit $(*)\cos(\phi) + (**)\sin(\phi)$:

$$R'(t) = R(t)$$

und mit $(*)\sin(\phi) - (**)\cos(\phi)$:

$$-R(t)\,\phi'(t) = -2R(t)U(t) \quad \Rightarrow \quad \phi'(t) = 2U(t)$$

Insgesamt wird das System zu

$$\begin{cases} R'(t) = R(t), & R(0) = 1 \\ \phi'(t) = 2U(t), & \phi(0) = \varphi \\ U'(t) = -\frac{1}{2}U(t), & U(0) = \frac{1}{2}\sin(\varphi) \end{cases}$$

$$\rightsquigarrow \quad \begin{aligned} R(t) &= e^t \\ U(t) &= \frac{1}{2}\sin(\varphi)\, e^{-\frac{1}{2}t} \\ \phi(t) &= 2\left(1 - e^{-\frac{1}{2}t}\right)\sin\varphi + \varphi \end{aligned}$$

Um hieraus die Lösung zu konstruieren muss die Abbildung

$$(t, \varphi) \mapsto (R(t;\varphi), \phi(t;\varphi))$$

invertiert werden. Für t geht das direkt:

$$t(R, \phi) = \log(R)$$

Für φ gilt:

$$\phi(t; \varphi + 2\pi) = \phi(t;\varphi) + 2\pi \qquad \forall t \geq 0$$

Es bleibt also nur z.Z. dass $\varphi \mapsto \phi(t;\varphi)$ monoton ist auf $[0, 2\pi)$

$$\partial_\varphi \phi = 2\left(1 - e^{-\frac{1}{2}t}\right)\cos\varphi + 1$$

Das ist positiv auf $[0,2\pi)$ g.d.w. $\left|2\left(1 - e^{-\frac{1}{2}t}\right)\right| < 1$

$$\iff t < \ln(4)$$

Das entspricht $R(\ln(4)) = 4$

c) Sei $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus B_1(0)$ und sei $v \in C_0^\infty(\Omega)$

Vorüberlegung

$$0 \overset{!}{=} \int_\Omega \left(\begin{pmatrix} x - 2yu \\ y + 2xu \end{pmatrix} \cdot \nabla u + \frac{1}{2} u \right) v \; d(x,y)$$

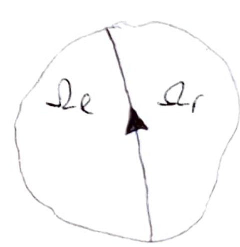
$$= \int_\Omega \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \nabla u + \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \cdot \nabla (u^2) + \frac{1}{2} u \right) v \; d(x,y)$$

$$= \int_{\partial B_1(0)} \left[\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{=-\vec{\nu}}}_{=1} uv + \underbrace{\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{=0} u^2 v \right] d\sigma - \int_\Omega \left[u \nabla \cdot \begin{pmatrix} xv \\ yv \end{pmatrix} + u^2 \nabla \cdot \begin{pmatrix} -yv \\ xv \end{pmatrix} - \frac{uv}{2} \right] d$$

$\rightarrow$ Wir nennen u Integrallsg. wenn für alle $v \in C_0^\infty(\Omega)$ gilt:

$$\int_\Omega \left[u\left(\frac{3}{2} v + x v_x + y v_y\right) + u^2 (x v_y - y v_x) \right] d(x,y) - \int_{\partial B_1(0)} uv \, d\sigma = 0$$

d) Sei S die Trennkurve zw. Ω_l und Ω_r



Sei u Integrallsg. und auf Ω_l $u = u_l$ kl. Lsg.

auf Ω_r $u = u_r$ kl. Lsg.

Wir integrieren partiell zurück

$$\int_{\Omega_{l/r}} \left[\frac{3}{2} uv + \begin{pmatrix} ux - u^2 y \\ uy + u^2 x \end{pmatrix} \cdot \nabla v \right] d(x,y)$$

$$= \int_S \begin{pmatrix} ux - u^2 y \\ uy + u^2 x \end{pmatrix} \cdot \vec{\nu}_{l/r} \; d\sigma$$

Wegen $\vec{v}_e = -\vec{v}_r$ ergibt sich für die Parametr. $\gamma(t)$ von S:

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} u_e\gamma_1 - u_e^2\gamma_2 & -u_r\gamma_1 + u_r^2\gamma_2 \\ u_e\gamma_2 + u_e^2\gamma_1 & -u_r\gamma_2 - u_r^2\gamma_1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix}(u_e - u_r) + \begin{pmatrix} -\gamma_2 \\ \gamma_1 \end{pmatrix}(u_e^2 - u_r^2)$$

e) Wir haben in b) gesehen, dass die Lsg. für

$t = \ln(4)$ (bzw. $R = 4$) nicht mehr eindeutig wird,

denn $\quad \partial_\varphi \phi(\ln(4); \varphi) = \cos\varphi + 1 = 0 \quad$ für $\varphi = \pi$.

Es gilt $\phi(\ln(4); \pi) = \sin(\pi) + \pi = \pi$.

Somit startet S bei

$$S_0 = (4\cos(\pi), 4\sin(\pi)) = (-4, 0)$$

Wegen

$$u_r(\gamma(t)) = \lim_{\varepsilon\to 0} U(t; \pi+\varepsilon) = -\lim_{\varepsilon\to 0} U(t; \pi-\varepsilon) = -u_e(\gamma(t))$$

folgt

$$\gamma'(t) = 2\,u_e(\gamma(t))\,\gamma(t)$$

$\Rightarrow$ S ist die Gerade $\left\{ \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} : \lambda \geq 0 \right\}$