Aufg. 1 $\quad A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}$

a) „(i) $\Rightarrow$ (ii)" Sei $\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor zum EW λ

$$\leadsto Q(\xi,\eta) = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}^T A \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}^T \lambda \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \lambda(\xi^2 + \eta^2)$$

Also gilt für beide EW λ_1, λ_2 entweder $\lambda_1, \lambda_2 \geq c$ oder $\lambda_1, \lambda_2 \leq -c$

„(ii) $\Rightarrow$ (iii)" A symmetr. $\Rightarrow \exists$ Orthonormalbasis aus Eigenvektoren $\vec{\varphi}_1, \vec{\varphi}_2$ zu EW λ_1, λ_2

Seien $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$: $c_1 \vec{\varphi}_1 + c_2 \vec{\varphi}_2 = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$,

dann gilt

$$\alpha t^2 + 2\beta t + \gamma = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}^T A \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= (c_1 \vec{\varphi}_1 + c_2 \vec{\varphi}_2)^T A (c_1 \vec{\varphi}_1 + c_2 \vec{\varphi}_2)$$

$$= (c_1 \vec{\varphi}_1 + c_2 \vec{\varphi}_2)^T (c_1 \lambda_1 \vec{\varphi}_1 + c_2 \lambda_2 \vec{\varphi}_2)$$

$$\underset{\vec{\varphi}_1, \vec{\varphi}_2 \text{ orthogonal}}{=} \lambda_1 c_1^2 |\vec{\varphi}_1|^2 + \lambda_2 c_2^2 |\vec{\varphi}_2|^2 \neq 0$$

da λ_1, λ_2 gleiches Vorzeichen und $c_1 \neq 0$ oder $c_2 \neq 0$

„(iii) ⇒ (i)" $\alpha t^2 + 2\beta t + \gamma = 0$ keine relle Lsg

$\Leftrightarrow D = 4\beta^2 - 4\alpha\gamma < 0$

$\Rightarrow \alpha\gamma > \beta^2 \geq 0$

<u>1. Fall:</u> $\alpha > 0$

$\rightsquigarrow$ die Fkt. $f(t) = \dfrac{\alpha t^2 + 2\beta t + \gamma}{t^2+1}$ ist positiv

und $\lim\limits_{|t| \to \infty} f(t) = \alpha \Rightarrow \exists M > 0$ s.d. $f(t) > \frac{\alpha}{2}$ für $|t| > M$

Sei $c = \min\left\{ \frac{\alpha}{2}, \min\limits_{t \in [-M,M]} f(t) \right\} > 0$

$\Rightarrow f(t) \geq c \quad \forall t \in \mathbb{R}$

Insb. gilt $f\left(\frac{\xi}{\eta}\right) = \dfrac{Q(\xi,\eta)}{\xi^2 + \eta^2} \geq c$

und $\dfrac{Q(\xi,0)}{\xi^2 + 0^2} = \lim\limits_{\eta \to 0} f\left(\frac{\xi}{\eta}\right) = \alpha > c$

<u>2. Fall</u> $\alpha < 0$ geht analog

b) Wegen (ii) ist L elliptisch

c) „(i) ⇒ (iv)" klar

„(iv) ⇒ (i)" Sei $r > 0$ bel. und def. $g(t) = Q(r\cos t, r\sin t)$

$\rightsquigarrow g$ stetig und nach Vor. $|g(t)| \geq c r^2 \quad \forall t \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow g$ hat keine Nullstelle, also konstantes Vorzeichen

$\Rightarrow g \geq c r^2$ oder $g \leq -c r^2$

Aufg. 2

- elliptisch falls $(1-x^2)(1-y^2) > (xy)^2$

$$\Leftrightarrow \quad x^2+y^2<1$$

- hyperbolisch falls $x^2+y^2>1$

- parabolisch nirgendwo

Aufg. 3

a) Für $i \neq j$ gilt:

$$a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} + a_{ji} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{a_{ij}+a_{ji}}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{a_{ij}+a_{ji}}{2} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i}$$

b) „(i) ⇒ (ii)" Wie in Aufg. 1

„(ii) ⇒ (i)" A symm. $\rightsquigarrow \exists\, T$ Matrix aus Eigenvektoren,

s.d. $A = T^T \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \cdot T$ und $T^T = T^{-1}$

$$\Rightarrow Q(\xi) = \xi^T A \xi = \xi^T T^T \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) T \xi \begin{array}{l} \geq \min \lambda_i \, |T\xi|^2 \\ \leq \max \lambda_i \, |T\xi|^2 \end{array}$$

Falls $\underbrace{\min \lambda_i}_{:= c} > 0 \rightsquigarrow Q(\xi) \geq c\, |T\xi|^2 = c\, |\xi|^2$

Falls $-c := \max \lambda_i < 0 \rightsquigarrow Q(\xi) \leq -c\, |T\xi|^2 = -c\, |\xi|^2$

„(i) ⇒ (iii)" ξ, η unabhängig heißt $|\xi + t\eta|^2 > 0 \ \forall t$

$\rightsquigarrow$ entweder $P(t) \geq c\, |\xi + t\eta|^2 > 0$

oder $P(t) \leq -c\, |\xi + t\eta|^2 < 0$

$\Rightarrow$ keine reelle Nullstelle

„(iii) ⇒ (i)" Da P keine reelle Nullstelle hat, gilt

$Q(\xi) = P(0) \neq 0 \quad \forall\, \xi \neq 0$

$\Rightarrow Q$ hat konstantes Vorzeichen in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

Falls $Q > 0$ wähle $c = \min_{|\xi|=1} Q(\xi)$

(Falls $Q < 0$ wähle $c = -\max_{|\xi|=1} Q(\xi)$)

$$\Rightarrow Q(\xi) = |\xi|^2 \, Q\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right) \geq c\, |\xi|^2 \quad \left(\text{oder } Q(\xi) \leq -c\, |\xi|^2\right)$$

Aufg. 4

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}$

$\det A = 1 - a^2$

$\Rightarrow$ elliptisch für $a \in (-1, 1)$

hyperbolisch für $a > 1$ oder $a < -1$

Für $a = 1$ gilt:

$$L_1 u = u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} + 2u_x + 2u_y$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \in \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow \text{nicht parabolisch}$$

Für $a = -1$ gilt:

$$L_{-1} u = u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} + 2u_x + 2u_y$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \notin \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow \text{parabolisch}$$

b) Es gilt $L_1 u = \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right)^2 u + 2\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right) u$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + 2\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right) u$$

Das kann zu einer gewöhnlich DGL gemacht werden:

$U(t) = u\left(\begin{pmatrix} s \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \rightsquigarrow \left(\frac{\partial}{\partial t} + 2\right)\frac{\partial}{\partial t} U = 0 \Leftrightarrow U'' + 2U' = 0$

$\Rightarrow U(t) = C_1 + C_2 e^{-2t}$ mit Konstanten die von s abhängen

$\begin{pmatrix} s+t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} s = x - y \\ t = y \end{matrix} \Rightarrow u(x,y) = C_1(x-y) + C_2(x-y)e^{-2y}$

mit $C_1, C_2 \in C^2(\mathbb{R})$

Aufg. 5

Wie Aufg. 2:

- hyperbolisch falls $(1-u_x^2)(1-u_y^2) \overset{!}{<} (u_x u_y)^2$

$$\Leftrightarrow \quad 1 < |\nabla u|^2$$

- elliptisch falls $1 > |\nabla u|^2$