Aufg. 1

a) Sei $R>0$ s.d. $u_0(x) = v_0(x) = 0$ für $|x| \geq R$

Nach d'Alembert gilt

$$u(x,t) = \frac{1}{2} u_0(x-t) + \frac{1}{2} u_0(x+t) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} v_0(y)\,dy$$

Insb. gilt $u(x,t) = 0$ für $|x| \geq R+t$.

$$\Rightarrow \dot{\mathcal{H}}(t) = \int_{\mathbb{R}} (u_t u_{tt} + u_x u_{xt})\,dx$$

$$\overset{\text{p.I.}}{=} \int_{\mathbb{R}} (u_t u_{tt} - u_{xx} u_t)\,dx + \underbrace{u_x(x,t) u_t(x,t) \Big|_{x=-(R+t)}^{R+t}}_{=0}$$

$$= \int_{\mathbb{R}} u_t \underbrace{(u_{tt} - u_{xx})}_{=0}\,dx = 0$$

b) Für φ, ψ mit $\varphi(x) = \psi(x) = 0$ für $|x| \geq R$ gilt

$$\varphi(x-t) = 0 \quad \text{für } x \notin [t-R, t+R]$$

und

$$\psi(x+t) = 0 \quad \text{für } x \notin [-t-R, -t+R]$$

Für $t>R$ gilt aber $t-R > 0 > -t+R$.

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}} \varphi(x-t)\psi(x+t)\,dx = 0 \qquad \forall t > R \qquad (*)$$

Nach d'Alembert gilt auch

$$u_t(x,t) = -\frac{1}{2} u_0'(x-t) + \frac{1}{2} u_0'(x+t) + \frac{1}{2} v_0(x+t) + \frac{1}{2} v_0(x-t)$$

und

$$u_x(x,t) = \frac{1}{2} u_0'(x-t) + \frac{1}{2} u_0'(x+t) + \frac{1}{2} v_0(x+t) - \frac{1}{2} v_0(x-t)$$

$$\Rightarrow \mathcal{H}_{kin}(t) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} u_t^2 \, dx = \frac{1}{8} \int_{\mathbb{R}} \Big([u_0'(x+t) - u_0'(x-t)] + [v_0(x+t) + v_0(x-t)] \Big)^2 dx$$

$$\overset{(*)}{=} \frac{1}{8} \int_{\mathbb{R}} \Big(u_0'(x+t)^2 + u_0'(x-t)^2 + 2u_0'(x+t)\, v_0(x+t) - 2u_0'(x-t)\, v_0(x-t) + v_0(x+t)^2 + v_0(x-t)^2 \Big) dx$$

$$\overset{(*)}{=} \frac{1}{8} \int_{\mathbb{R}} \Big(u_0'(x+t) + u_0'(x-t) + v_0(x+t) - v_0(x-t) \Big)^2 dx$$

$$= \mathcal{H}_{pot}(t)$$

Aufg. 2

Nach Duhamel

$$\begin{cases} v_{tt} - v_{xx} = 2e^{-x^2}(1-2x^2) &, x \in \mathbb{R}, t>0 \\ v(x,0) = v_t(x,0) = 0 &, x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\Rightarrow v(x,t) = \frac{1}{2} \int_0^t \int_{x-(t-s)}^{x+(t-s)} 2e^{-y^2}(1-2y^2)\, dy\, ds$$

$$= \int_0^t \left[e^{-y^2} y \right]_{x-(t-s)}^{x+(t-s)} ds$$

$$= \int_0^t (x+t-s)\, e^{-(x+t-s)^2} - (x-t+s)\, e^{-(x-t+s)^2}\, ds$$

$$= \frac{1}{2} e^{-x^2} + \frac{1}{2} e^{-x^2} - \frac{1}{2} e^{-(x+t)^2} - \frac{1}{2} e^{-(x-t)^2}$$

Zusammen mit d'Alembert ergibt sich

$$u(x,t) = \frac{1}{2} u(x-t,0) + \frac{1}{2} u(x+t,0) + v(x,t)$$

$$= \frac{1}{2} e^{-(x-t)^2} \sin(x-t) + \frac{1}{2} e^{-(x+t)^2} \sin(x+t) + v(x,t)$$

$$= \frac{1}{2} e^{-(x-t)^2} (\sin(x-t) - 1) + \frac{1}{2} e^{-(x+t)^2} (\sin(x+t) - 1) + e^{-x^2}$$

Aufgabe 3

a) Mit Hilfe von Charakteristiken:

Sei $v = (\partial_t + \partial_x) u$

$$\begin{cases} v_t - v_x = 0 \\ v(s,s) = \frac{d}{ds} u(s,s) = 4\sin(s)\cos(s) = 2\sin(2s) \end{cases}$$

$\Rightarrow v(x,t) = 2\sin(x+t)$

Zudem gilt $u_t(0,t) = v(0,t) - u_x(0,t)$

$= 2\sin(t) - \sin(t)$

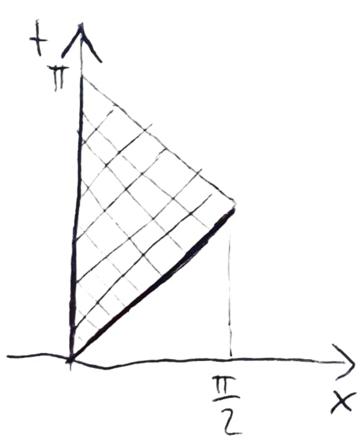
$= \sin(t)$

$\Rightarrow u(0,t) = \int_0^t u_t(0,z)\,dz + u(0,0) = 1 - \cos(t)$

$$\begin{cases} u_t + u_x = v \\ u(0,t) = 1 - \cos(t) \end{cases}$$

$\dots \Rightarrow u(x,t) = 1 - \cos(x+t)$

b)



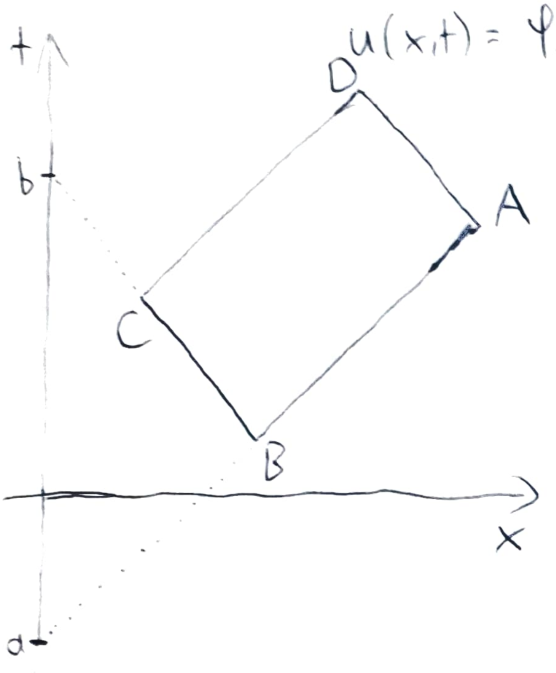
Die Lsg. ist eindeutig für

$0 \leq x \leq t \leq \pi - x$

Aufg. 4

Nach d'Alembert gilt

$$u(x,t) = \varphi_1(x-t) + \varphi_2(x+t)$$



Für die Seiten gilt

$t - x = a$ auf [AB]

$t + x = b$ auf [BC]

$t - x = c$ auf [CD]

$t + x = d$ auf [DA]

$$\Rightarrow u(A) - u(B) + u(C) - u(D)$$

$$= \varphi_1(a) + \varphi_2(d) - \varphi_1(a) - \varphi_2(b) + \varphi_1(c) + \varphi_2(b) - \varphi_1(c) - \varphi_2(d)$$

$$= 0$$

Aufg. 5

a) U ist radial-symm. $\rightsquigarrow$ Nach Aufg. 6 Blatt 2 gilt

$$\Delta U = r^{-2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u(r,t)}{r} \right) \quad \text{für } |x| = r$$

$$r^{-2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u}{r} \right) = r^{-2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \left(\frac{\partial_r u}{r} - \frac{u}{r^2} \right)$$

$$= r^{-2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \partial_r u - u \right) = r^{-2} \left(\partial_r u + r \partial_{rr} u - \partial_r u \right)$$

$$= \frac{\partial_{rr} u}{r} = \frac{\partial_{tt} u}{c^2 r} = \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^2 \left(\frac{u(r,t)}{r} \right)$$

b) Für passend u_0, v_0 wäre

$$u(x,t) = \frac{1}{2} u_0(x-ct) + \frac{1}{2} u_0(x+ct) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} v_0(s)\, ds$$

$$\rightsquigarrow U(x,t) = \frac{1}{2} \frac{u_0(|x|-ct) + u_0(|x|+ct)}{|x|} + \frac{1}{2c|x|} \int_{|x|-ct}^{|x|+ct} v_0(s)\, ds$$

Sei $u_0 \in C^1(\mathbb{R})$ mit $u_0(-s) = -u_0(s)$, dann gilt

$$\frac{u_0(|x|-ct) + u_0(|x|+ct)}{|x|} = \frac{u_0(|x|-ct) - u_0(-ct) - u_0(ct) + u_0(|x|+ct)}{|x|}$$

$$\xrightarrow{|x| \to 0} u_0'(-ct) + u_0'(ct)$$

Und für $v_0 \in C(\mathbb{R})$ mit $v_0(-s) = -v_0(s)$ gilt

$$\frac{1}{2c|x|} \int_{|x|-ct}^{|x|+ct} v_0(s)\, ds = \frac{1}{2c|x|} \int_{-|x|+ct}^{|x|+ct} v_0(s)\, ds = \frac{1}{2c} \int_{-1}^{1} v_0(ct + \lambda |x|)\, d\lambda \xrightarrow{|x| \to 0} \frac{v_0(ct)}{c}$$

$\Rightarrow U$ stetig