Blatt 9

Aufg. 1

a) $F(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} \chi_{[-1,1]}(x)\varphi(x)\,dx$

Da $\chi_{[-1,1]} \in L^1_{loc}$ ist F eine reguläre Distr.

b) Für $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ mit $\operatorname{supp}\varphi \subset [-K,K]$ gilt

$$F(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} \varphi'\,dx = \int_{-K}^{K} \varphi'\,dx = \varphi(K) - \varphi(-K) = 0$$

$\Rightarrow F(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} 0 \cdot \varphi(x)\,dx$, also ist F eine reguläre Distr.

c) F ist offensichtlich linear

Falls $\varphi_n \to \varphi$ in $\mathcal{D}$, gilt insb. $\|\varphi_n - \varphi\|_\infty \to 0$

und $\|\varphi_n' - \varphi'\|_\infty \to 0$

$$\Rightarrow |F(\varphi_n) - F(\varphi)| \leq |\varphi_n(-1) - \varphi(-1)| + |\varphi_n'(1) - \varphi'(1)| \to 0$$

Für alle $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ mit $\operatorname{supp}\varphi \subset \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

gilt $F(\varphi) = 0$

Wäre F regulär, $F(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} f \varphi\,dx$,

dann wäre wegen dem Hauptlemma $f = 0$ f.ü. $\Rightarrow F = 0$ ↯

d) $F(\varphi) = \int_0^\infty x\,\varphi''(x)\,dx \overset{\text{p.I.}}{=} \underbrace{x\varphi'\Big|_0^\infty}_{=0} - \int_0^\infty \varphi'(x)\,dx = \varphi(0)$

also die Dirac-δ-Distribution (nicht regulär).

Aufg. 2

a) Es gilt $\operatorname{supp} \varphi_k = \operatorname{supp} \varphi \quad \forall k \in \mathbb{N}$

und $\| \varphi_k^{(m)} \|_\infty = \frac{1}{k} \| \varphi^{(m)} \|_\infty \xrightarrow{k\to\infty} 0 \quad \forall m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$\Rightarrow \varphi_k \to 0$ in $\mathcal{D}$ $\Rightarrow \varphi_k \to 0$ in $\mathcal{S}$

b) Angenommen es gäbe $\varphi_\infty \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ mit $\varphi_k \to \varphi_\infty$ in $\mathcal{S}$.

Da $\| \varphi_k \|_\infty = \frac{1}{k} \| \varphi \|_\infty \to 0$ müsste $\varphi_\infty = 0$.

Aber $\| \varphi_k' \|_\infty = \| \varphi' \|_\infty > 0 \quad \forall k$

Insb. $\| \varphi_k \|_{m,l}^* \not\to 0$, s.d. φ_k nicht in $\mathcal{S}$ konv.

(und somit auch nicht in $\mathcal{D}$).

c) Wegen $|\varphi(0)| > 0$ gilt auch $|\varphi(\varepsilon)| > 0$ für $\varepsilon > 0$

hinreichend klein.

$\rightsquigarrow \| \varphi_k \|_{1,2}^* \geq \sup_{x \in \mathbb{R}} | x^2 \varphi_k(x) | \geq (k\varepsilon)^2 \frac{|\varphi(\frac{k\varepsilon}{k})|}{k}$

$= k \varepsilon^2 |\varphi(\varepsilon)| \xrightarrow{k\to\infty} \infty$

$\Rightarrow \varphi_k$ konv. nicht in $\mathcal{S}$

Aufgabe 3

a) $$\left(CH\frac{1}{x}\right)(\varphi) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\infty}\right)\frac{1}{x}\varphi(x)dx$$

$$= \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\left(\int_{-K}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{K}\right)\frac{1}{x}\varphi(x)dx \underset{\uparrow}{=} \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\left(\int_{-K}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{K}\right)\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}dx$$

da $\left(\int_{-K}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{K}\right)\frac{1}{x}dx = 0$

Nach dem MWS gilt zudem $\left|\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\right| \leq \|\varphi'\|_\infty$

$\Rightarrow \left|CH\frac{1}{x}(\varphi)\right| \leq 2K\|\varphi'\|_\infty$

b) Linearität $CH\frac{1}{x}(\alpha\varphi_1+\beta\varphi_2) = \alpha CH\frac{1}{x}(\varphi_1) + \beta CH\frac{1}{x}(\varphi_2)$ ist klar

Zur Stetigkeit: Seien $\varphi_n, \varphi \in \mathcal{D}$ mit $\varphi_n \longrightarrow \varphi$ in $\mathcal{D}$.

Dann gibt es $K>0$ s.d. $\operatorname{supp}\varphi_n, \operatorname{supp}\varphi \subset [-K,K]$ $\forall n$

und es gilt $\lim_{n\to\infty}\|\varphi_n^{(m)} - \varphi^{(m)}\|_\infty = 0$ $\forall m \in \mathbb{N}_0$

$\overset{a)}{\Rightarrow} \left|CH\frac{1}{x}(\varphi_n) - CH\frac{1}{x}(\varphi)\right| = \left|CH\frac{1}{x}(\varphi_n-\varphi)\right| \leq 2K\|\varphi_n'-\varphi'\|_\infty \xrightarrow{n\to\infty} 0$

c) $$(\mathrm{CH}\tfrac{1}{x})'(\varphi) \overset{\text{Def.}}{=} -\mathrm{CH}\tfrac{1}{x}(\varphi') = -\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\infty}\right)\frac{1}{x}\varphi'(x)\,dx$$

$$\overset{\text{p.I.}}{=} -\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\left(\frac{1}{x}\varphi(x)\Big|_{-\infty}^{-\varepsilon} + \frac{1}{x}\varphi(x)\Big|_{\varepsilon}^{\infty} + \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\infty}\right)\frac{1}{x^2}\varphi(x)\,dx\right)$$

$$= \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\left(\frac{\varphi(-\varepsilon)}{\varepsilon} + \frac{\varphi(\varepsilon)}{\varepsilon} - \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\infty}\right)\frac{\varphi(x)}{x^2}\,dx\right)$$

$$= \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\left(\underbrace{\frac{\varphi(-\varepsilon)-\varphi(0)}{\varepsilon}}_{= -\frac{\varphi(0-\varepsilon)-\varphi(0)}{-\varepsilon} \to -\varphi'(0)} + \underbrace{\frac{\varphi(\varepsilon)-\varphi(0)}{\varepsilon}}_{\to \varphi'(0)} - \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\infty}\right)\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x^2}\,dx\right)$$

$$= \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\infty}\right)\frac{-1}{x^2}\left(\varphi(x)-\varphi(0)\right)dx$$

d) Nein, denn sei z.B $\varphi \in \mathcal{D}$ mit $\varphi(0) > 0$.

Dann $\exists \varepsilon_0 > 0 : \varphi(x) > \frac{\varphi(0)}{2} \quad \forall x \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$

$$\Rightarrow -\int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{\varphi(x)}{x^2}\,dx = -\underbrace{\left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon_0} + \int_{\varepsilon_0}^{\infty}\right)\frac{\varphi(x)}{x^2}\,dx}_{= C \in \mathbb{R}} - \left(\int_{-\varepsilon_0}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\varepsilon_0}\right)\frac{\varphi(x)}{x^2}\,dx$$

$$\leq -C - \frac{\varphi(0)}{2}\left(\int_{-\varepsilon_0}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\varepsilon_0}\right)\frac{1}{x^2}\,dx \xrightarrow{\varepsilon\to 0} -\infty$$

Aufg. 4

a) In $x \neq 0$ gilt

$$g'(x) = 2x\cos\left(\frac{\pi}{x^2}\right) + \frac{2\pi}{x}\sin\left(\frac{\pi}{x^2}\right)$$

und zudem

$$\left|\frac{g(x)-g(0)}{x}\right| = \left|x\cos\left(\frac{\pi}{x^2}\right)\right| \leq |x| \to 0 \,, \quad x \to 0$$

$$\Rightarrow g'(0) = 0$$

b) $g'(x)$ ist auf keinem Intervall $[a,b]$ mit $0 \in [a,b]$ integrierbar.

Man betrachte z.B. die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| g\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right) - g\left(\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)\right| = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1}\right)$$

Eine Distribution $F_{g'}$ ist daher überhaupt nicht wohldefiniert. Für $\varphi \in C_0^\infty$ gilt aber:

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\infty}\right) g'(x)\varphi(x)\,dx \underset{\substack{\uparrow \\ g \in C^\infty \text{ für} \\ x \neq 0}}{=} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left[g(x)\varphi(x)\Big|_{-\infty}^{-\varepsilon} + g(x)\varphi(x)\Big|_{\varepsilon}^{\infty} - \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\infty}\right) g\varphi'\,dx \right]$$

$$= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left[\underbrace{\varepsilon^2\cos\left(\frac{\pi}{\varepsilon^2}\right)(\varphi(-\varepsilon)-\varphi(\varepsilon))}_{\to 0} - \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\infty}\right) \underbrace{g(x)\varphi'(x)}_{\text{integrierbar}}\,dx \right]$$

$$= -\int_{\mathbb{R}} g(x)\varphi'(x)\,dx$$

Aufg. 5 Es gilt $E(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{2} & , t \geq |x| \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$

Für $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ folgt

$$\int_{\mathbb{R}^2} E(x,t)\left(\partial_2^2 - \partial_1^2\right)\varphi(x,t)\,dx\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\int_{|x|}^{\infty} \partial_2^2\varphi(x,t)\,dt\,dx - \frac{1}{2}\int_0^\infty\int_{-t}^{t} \partial_1^2\varphi(x,t)\,dx\,dt$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \left(-\partial_2\varphi(x,|x|)\right)dx}_{=-\int_0^\infty \partial_2\varphi(x,x)\,dx - \int_{-\infty}^0 \partial_2\varphi(x,-x)\,dx = -\int_0^\infty \partial_2\varphi(t,t)\,dt - \int_0^\infty \partial_2\varphi(-t,t)\,dt} - \frac{1}{2}\int_0^\infty \left(\partial_1\varphi(t,t) - \partial_1\varphi(-t,t)\right)dt$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^\infty \Big(\underbrace{\partial_1\varphi(t,t) + \partial_2\varphi(t,t)}_{=\frac{d}{dt}\varphi(t,t)} \underbrace{- \partial_1\varphi(-t,t) + \partial_2\varphi(-t,t)}_{=\frac{d}{dt}\varphi(-t,t)}\Big)\,dt$$

$$= -\frac{1}{2}\left[-\varphi(0,0) - \varphi(0,0)\right] = \varphi(0,0)$$