

Variationsrechnung

Kapitel 3



Rand- und Nebenbedingungen

Es tönt trivial, aber die einfachste Art wie Randbedingungen auftreten ist, dass man sie vorschreibt. In einem Anfängerkurs Differentialgleichungen hat man fast nur solche Beispiele. Auch bei der Brachystochrone haben wir Lösungen gesucht, bei denen $u(0) = 0$ und $u(6) = 1$ erfüllt sein soll. Damit hat man nur im Inneren des Gebietes zu variieren und es folgt, angenommen die Funktionen sind genügend regulär, eine Differentialgleichung im Inneren des Gebietes.

3.1 Natürliche Randbedingungen

Wir können ein Funktional $J(u) = \int_{\Omega} F(x, u, \nabla u) dx$ betrachten für Funktionen in $\{u \in C^1(\bar{\Omega}); u = 0 \text{ auf } \Gamma\}$, wobei Γ nur ein Teil von $\partial\Omega$ ist. Wenn wir u auf $\partial\Omega \setminus \Gamma$ nicht vorschreiben, dann sollte man u auch da variieren. Also gestatten, dass φ einen Träger in $\bar{\Omega} \setminus \Gamma$ hat. Wenn wir das Minimum wieder \tilde{u} nennen, wird die schwache Euler-Lagrange Gleichung wie folgt

$$0 = \int_{\Omega} \left(F_u(x, u, \nabla u) \varphi + F_p(x, u, \nabla u) \cdot \nabla \varphi \right) dx \quad \text{für alle } \varphi \in C^{\infty}(\bar{\Omega}) \text{ mit} \\ \text{support } \varphi \subset \bar{\Omega} \setminus \Gamma.$$

Angenommen die betreffenden Funktionen sind genügend regulär, dann liefert die partielle Integration

$$0 = \int_{\partial\Omega \setminus \Gamma} \vec{\nu} \cdot F_p(x, u, \nabla u) \varphi \, d\sigma + \int_{\Omega} \left(F_u(x, u, \nabla u) - \nabla_x \cdot F_p(x, u, \nabla u) \right) \varphi \, dx. \quad (3.1)$$

Weil $C_c^{\infty}(\bar{\Omega})$ eine Teilmenge ist von $\{\varphi \in C^{\infty}(\bar{\Omega}); \text{support } \varphi \subset \bar{\Omega} \setminus \Gamma\}$, gilt (3.1) auch für $\varphi \in C_c^{\infty}(\bar{\Omega})$. Für solche $\varphi \in C_c^{\infty}(\bar{\Omega})$ ist das Randintegral identisch 0 und (3.1) vereinfacht sich zu

$$0 = \int_{\Omega} \left(F_u(x, u, \nabla u) - \nabla_x \cdot F_p(x, u, \nabla u) \right) \varphi \, dx.$$

Lemma 2.2.1 liefert uns dann, dass $F_u(x, u, \nabla u) - \nabla_x \cdot F_p(x, u, \nabla u) = 0$. Wenn wir das nun haben, folgt, dass das zweite Integral in (3.1) gleich 0 ist. Deshalb gilt auch, diesmal für $\varphi \in C^{\infty}(\bar{\Omega})$ mit $\text{support } \varphi \subset \bar{\Omega} \setminus \Gamma$, dass

$$0 = \int_{\partial\Omega \setminus \Gamma} \vec{\nu} \cdot F_p(x, u, \nabla u) \varphi \, d\sigma. \quad (3.2)$$

Da man zeigen kann, dass

$$\{\psi \in C^\infty(\partial\Omega); \text{support}\psi \subset \partial\Omega \setminus \Gamma\} = \{\varphi|_{\partial\Omega}; \varphi \in C^\infty(\bar{\Omega}); \text{support}\varphi \subset \bar{\Omega} \setminus \Gamma\},$$

kann man Lemma 2.2.1 auf $\partial\Omega \setminus \Gamma$ verwenden und findet so eine zweite Randbedingung, nämlich $\vec{\nu} \cdot F_p(x, u, \nabla u) = 0$.

Das Minimierungsproblem für J führt uns zum folgenden Randwertproblem:

$$\begin{cases} F_u(x, u, \nabla u) - \nabla_x \cdot F_p(x, u, \nabla u) = 0 & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{auf } \Gamma, \\ \vec{\nu} \cdot F_p(x, u, \nabla u) = 0 & \text{auf } \partial\Omega \setminus \Gamma. \end{cases} \quad (3.3)$$

Die letzte Gleichung in (3.3) ist die zum Minimierungsproblem gehörende *natürliche Randbedingung*.

Beispiel 3.1.1 Betrachten wir nochmals das vereinfachte Modell der Saite in Beispiel 2.6.4:

$$J(u) = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} (u')^2 - f u \right) dx.$$

Statt an beiden Enden u vorzuschreiben, können wir zum Beispiel $u(1)$ freilassen. Freilassen bedeutet hier nicht einfach ein Ende loslassen, denn dann erwartet man nicht, dass das Modell noch vernünftig ist. Man kann sich jedoch vorstellen, dass das rechte Ende $x = x_e = 1$ vorgeschrieben wird ohne $u(x_e)$ vorzuschreiben. Man kann sich dieses Problem mechanisch vorstellen durch eine Saite, die am linken Ende befestigt ist, und am rechten Ende mit einem Knoten versehen ist, der sich nur in vertikaler Richtung frei bewegen lässt. Dieser Knoten könnte zum Beispiel durch eine schmale Spalte zurückgehalten werden. Mathematisch heißt es, dass wir J minimieren über Funktionen in $\{u \in C^1[0, 1]; u(0) = 0\}$. Man findet mit den obigen Argumenten das folgende Randwertproblem

$$\begin{cases} -u'' = f & \text{in } (0, 1), \\ u(0) = 0, \\ u'(1) = 0. \end{cases}$$

Die Randbedingung $u(0) = 0$ ist vorgeschrieben und $u'(1) = 0$ ist die natürliche Randbedingung.

Aufgabe 7 Zu einer Seifenblase zwischen einem halben Ring und einer glatten Wand, die durch einen konstanten einseitig größeren Luftdruck ausgedehnt ist, gehört das folgende Minimierungsproblem:

$$J(u) = \int_{\Omega} \left(\sqrt{1 + |\nabla u|^2} - p u \right) dx.$$

Dabei nehmen wir $\Omega = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; x_1^2 + x_2^2 < 1 \text{ und } x_1 > 0\}$. Die zulässigen Funktionen sind

$$\mathcal{C} = \{u \in C^1(\bar{\Omega}); u(x) = 0 \text{ für } x \in \bar{\Omega} \text{ mit } |x| = 1\}.$$

1. Beschreibe das Randwertproblem, das die Euler-Lagrange Gleichung bringt.
2. Bemerke, dass die Fortsetzung $\bar{u}(x_1, x_2) = u(|x_1|, x_2)$ einem radialsymmetrischen Problem unterliegt.
3. Finde eine radialsymmetrische Lösung.

Aufgabe 8 Die Frage, die bei der Brachystochrone erscheint, kann man auch wie folgt ändern. Statt zu fragen, wie man mit der Achterbahn am schnellsten von $(0, 0)$ zu $(6, -1)$ kommt, könnte es einem auch egal sein, auf welcher Höhe man für $x = 6$ ankommt. Durch welche Kurve ist man am schnellsten von $(0, 0)$ bei $x = 6$?

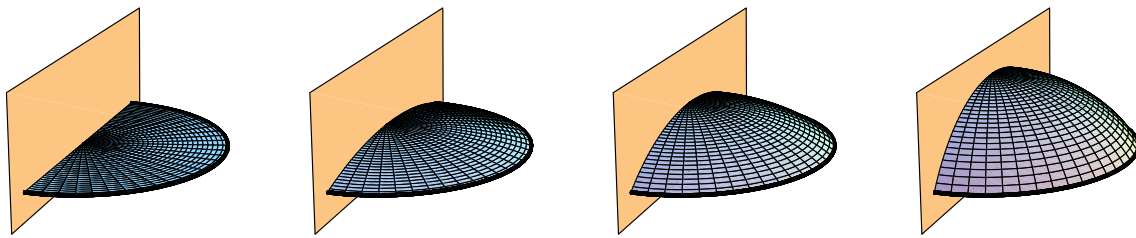


Abbildung 3.1: Auf einem Teil des Randes beim Modell einer Seifenblase zwischen Ring und glatter Wand ist die Randbedingung nicht festgelegt.

3.2 Nebenbedingungen

Statt Randbedingungen kann man andere Bedingungen begegnen. Ein paar Beispiele folgen.

3.2.1 Die Vorhangschiene

Ein einfaches Modell, das die Energie für einen elastischen Stab beschreibt, der eine seitwärts gerichtete Kraft mit Dichte f empfindet, ist

$$J(u) = \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{2} (u'')^2 - f u \right) dx.$$

Nimmt man an, der Stab ist am Rand eingespannt und in der Mitte durch einen Ring fixiert die kleine Drehungen zulässt, dann sind die folgende Funktionen passend:

$$\mathcal{C} = \{u \in C^2[-1, 1]; u(-1) = u'(-1) = u(0) = u(1) = u'(1) = 0\}$$

Dieses Funktional erscheint, wenn man ein einfaches Modell für das Durchbiegen einer Vorhangschiene sucht.

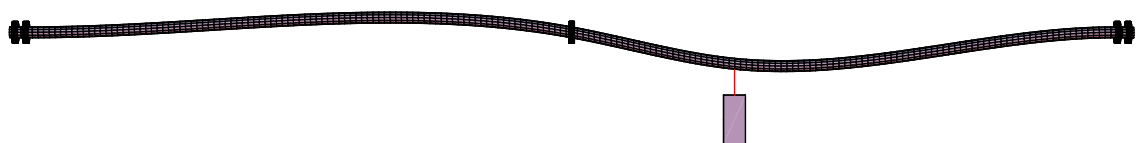


Abbildung 3.2: In der Mitte der Vorhangschiene ist die Höhe fixiert. Hier ist übrigens an den Enden $u = u' = 0$ angedeutet.

Die schwache Form der Euler-Lagrange Gleichung ist

$$0 = \int_{-1}^1 (u'' \varphi'' - f \varphi) dx \text{ für alle Testfunktionen } \varphi.$$

Die erste Frage, die sich aufdrängt, ist folgende: Welche Testfunktionen soll man eigentlich benutzen? Der erste Ansatz wäre, die Funktionen φ auch, genau wie u selber, in \mathcal{C} zu nehmen. Vielleicht reicht es aber, diesen Raum einzuschränken, ähnlich wie wir vorher $C_c^\infty(\Omega)$ benutzt haben. Wir zeigen mal ein paar Versuche.

- Auf dem ersten Blick könnte man vermuten, dass man testen soll mit $\varphi \in C^\infty[-1, 1]$, für die gilt, dass der Träger die Stellen $\{-1, 0, 1\}$ nicht enthält. Daraus würde für einen Minimierer in $C^4[-1, 1]$ folgen

$$\begin{cases} u'''' = f \text{ in } (-1, 1), \\ u(-1) = u'(-1) = u(0) = u(1) = u'(1) = 0. \end{cases}$$

Leider hat man da eine Bedingung zu viel für ein wohlgestelltes Problem¹. Wenn man die Bedingung $u(0) = 0$ weglässt, hat man für jedes $f \in C[-1, 1]$ die Lösung

$$u(x) = \int_{-1}^1 \frac{1}{12} (8 - (3 - xy)(2 + x^2 + y^2) + (x - y)^2 |x - y|) f(y) dy$$

und $u(0) = 0$ ist nur erfüllt, wenn

$$\int_{-1}^1 (2 - 3y^2 + |y|^3) f(y) dy = 0.$$

- Nachdem dieser Ansatz fehlgeschlagen ist, könnte man sich überlegen, ob man das Problem nicht in zwei Probleme zerlegen sollte: eins auf $[-1, 0]$ und eins auf $[0, 1]$. Schreiben wir $u_r = u|_{[0, 1]}$ und $u_\ell = u|_{[-1, 0]}$. Wir finden

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^1 (u''\varphi'' - f\varphi) dx = [u''\varphi']_0^1 + \int_0^1 (u'''' - f)\varphi dx = \\ &= -u''(0)\varphi'(0) + \int_0^1 (u'''' - f)\varphi dx. \end{aligned}$$

Wir finden

$$\begin{cases} u_\ell'''' = f \text{ in } (-1, 0), \\ u_\ell(0) = u_\ell(-1) = u_\ell'(-1) = 0. \end{cases} \quad \text{und} \quad \begin{cases} u_r'''' = f \text{ in } (0, 1), \\ u_r(0) = u_r(1) = u_r'(1) = 0, \end{cases}$$

Es fehlt links und rechts noch eine Bedingungen für eine eindeutige Lösung. Diese Bedingungen folgen aus der Annahme, dass $u \in C^2[-1, 1]$, nämlich

$$u_\ell'(0) = u_r'(0) \text{ und } u_\ell''(0) = u_r''(0).$$

Aufgabe 9 Wir betrachten das Problem der Vorhangschiene, die in der Mitte und an den beiden Enden nur fixiert wird:

$$u \in \mathcal{C}_1 = \{u \in C^\infty[-1, 1]; u(-1) = u(0) = u(1) = 0\}.$$

Wir nehmen an, dass $f \in C[-1, 1]$ und dass der Minimierer folgende Eigenschaften hat:

$$\begin{aligned} u(-1) = 0, \quad u(0) = 0, \quad u(1) = 0, \\ u|_{[-1, 0]} \in C^4[-1, 0], \quad u \in C^2[-1, 1], \quad u|_{[0, 1]} \in C^4[0, 1], \end{aligned} \quad (3.4)$$

und wir testen mit Funktionen in $\varphi \in \mathcal{C}_1$.

¹Hadamard nannte drei Kriterien für ein wohlgestelltes Problem:

- Existenz: es soll mindestens eine Lösung haben.
- Eindeutigkeit: es soll höchstens eine Lösung haben.
- Robustheit: kleine Änderungen im Problem geben kleine Änderungen bei der Lösung.

1. Zeige, dass man so zwei Differentialgleichungen vierter Ordnung bekommt, eine auf $[-1, 0]$ und eine auf $[0, 1]$, mit insgesamt 8 Bedingungen.
Übrigens kann man sogar zeigen, dass dieses Problem für jedes $f \in C[-1, 1]$ genau eine Lösung hat, die (3.4) erfüllt.
2. Was passiert, wenn man $u \in C^2[-1, 1]$ in (3.4) ersetzt durch $u \in C^3[-1, 1]$ und testet mit Funktionen in $\{\varphi \in C^3[-1, 1]; \varphi(-1) = \varphi(0) = \varphi(1) = 0\}$?

3.2.2 Ein Funktional als Nebenbedingung

Ein Beispiel mit einem anderen Typ von Bedingung findet man in der folgenden Frage:

Welche Kurve $(x, u(x))$ von Länge 3, die $(-1, 0)$ und $(1, 0)$ verbindet, ergibt den maximalen Flächeninhalt zwischen der horizontalen Achse und dieser Kurve?

Für die Variationsrechnung formuliert, wird dies: finde das Maximum von $J(u) = \int_{-1}^1 u(x) dx$ unter der Bedingung $I(u) = \int_{-1}^1 \sqrt{1 + (u'(x))^2} dx = 3$.

3.3 Lagrange-Multiplikator

Theorem 3.3.1 Sei $F, G \in C^2(\bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ und definiere für $u \in C^1(\bar{\Omega})$

$$J(u) = \int_{\Omega} F(x, u, Du) dx \quad \text{und} \quad I(u) = \int_{\Omega} G(x, u, Du) dx.$$

Sei $\mathcal{C} \subset C^1(\bar{\Omega})$ derart, dass es für jede $u \in C^1(\bar{\Omega})$ und $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ einen $\varepsilon > 0$ gibt mit $u + t\varphi \in \mathcal{C}$ für alle $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

Wenn $J : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$ unter der Nebenbedingung $I(u) = \ell$ ein globales Minimum hat in $\tilde{u} \in C^2(\bar{\Omega})$, dann gilt

- $\partial I(\tilde{u}; \cdot) = 0$, oder
- es gibt $\lambda \in \mathbb{R}$ derart, dass $\partial J(\tilde{u}; \cdot) = \lambda \partial I(\tilde{u}; \cdot)$.

Das λ nennt man den Lagrange-Multiplikator².

Bemerkung 3.3.2 $\partial J(\tilde{u}; \cdot)$ und $\partial I(\tilde{u}; \cdot)$ sind Funktionale. Aus dem Hauptlemma folgt, dass die Gleichung in zweiten Punkt genau dann gilt, wenn

$$F_u(\cdot, \tilde{u}, D\tilde{u}) - \nabla_x F_p(\cdot, \tilde{u}, D\tilde{u}) = \lambda \left(G_u(\cdot, \tilde{u}, D\tilde{u}) - \nabla_x G_p(\cdot, \tilde{u}, D\tilde{u}) \right). \quad (3.5)$$

Bemerkung 3.3.3 Man kann selber überlegen, wie man dieses Theorem erweitert für mehrere Nebenbedingungen $I_i(u) = \ell_i$, $i = 1, \dots, k$.

Beweis. Wir nehmen an, dass $\mathcal{C} = C^1(\bar{\Omega}) \cap C_0(\bar{\Omega})$. Bei andere Randbedingungen kann man sich überlegen, an welche Stellen sich der Beweis ändert.

²Multiplikator = multiplier

Wir definieren

$$\begin{aligned} H(x, \lambda) &= F_u(x, \tilde{u}(x), D\tilde{u}(x)) - \nabla_x \cdot F_p(x, \tilde{u}(x), D\tilde{u}(x)) \\ &\quad - \lambda \left(G_u(x, \tilde{u}(x), D\tilde{u}(x)) - \nabla_x \cdot G_p(x, \tilde{u}(x), D\tilde{u}(x)) \right). \end{aligned}$$

Nehmen wir an, der erste Punkt des Theorems ist nicht erfüllt. Das bedeutet, es gibt ein $x_0 \in \Omega$ derart, dass

$$G_u(x_0, \tilde{u}(x_0), D\tilde{u}(x_0)) - \nabla_x \cdot G_p(x_0, \tilde{u}(x_0), D\tilde{u}(x_0)) \neq 0. \quad (3.6)$$

Wegen (3.6) kann man λ so berechnen, dass gilt:

$$H(x_0, \lambda) = 0. \quad (3.7)$$

Wenn (3.7) erfüllt ist für alle $x \in \Omega$, dann gilt (3.5) und wir sind fertig.

Wir versuchen zu einem Widerspruch zu gelangen, wenn wir annehmen, dies sei nicht so. Das heißt also, wir nehmen an, dass es ein x_1 gibt mit

$$h := H(x_1, \lambda) \neq 0.$$

Aus Stetigkeitsgründen gilt, dass

$$\begin{aligned} H(x, \lambda_0) &= \mathcal{O}(|x - x_0|) \text{ für } x \rightarrow x_0 \text{ und} \\ H(x, \lambda_0) &= h + \mathcal{O}(|x - x_1|) \text{ für } x \rightarrow x_1. \end{aligned}$$

Als Nächstes nehmen wir Testfunktionen φ_0 und φ_1 , wie in (2.8), einmal mit Träger $B_\varepsilon(x_0)$ und einmal mit Träger $B_\varepsilon(x_1)$. Jetzt betrachten wir

$$f(s, t) = I(\tilde{u} + s\varphi_0 + t\varphi_1).$$

Wieder aus Stetigkeitsgründen und für ε genügend klein folgt

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial s} f(s, t) \right)_{|s=0, t=0} &= \int_{\Omega} \left(G_u(\cdot, \tilde{u}, D\tilde{u}) - \nabla_x \cdot G_p(\cdot, \tilde{u}, D\tilde{u}) \right) \varphi_0 \, dx = \\ &= \int_{B_\varepsilon(x_0)} \left(G_u(\cdot, \tilde{u}, D\tilde{u}) - \nabla_x \cdot G_p(\cdot, \tilde{u}, D\tilde{u}) \right) \varphi_0 \, dx \neq 0. \end{aligned}$$

Der Satz über implizite Funktionen besagt dann: es gibt $\delta > 0$ und eine Funktion $s : (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{R}$ derart, dass $f(s(t), t) = \ell$. Anders formuliert, für $t \in (-\delta, \delta)$ erfüllt $\tilde{u} + s(t)\varphi_0 + t\varphi_1$ die Nebenbedingung $I(\tilde{u} + s(t)\varphi_0 + t\varphi_1) = 0$ und deshalb auch $\frac{\partial}{\partial t} I(\tilde{u} + s(t)\varphi_0 + t\varphi_1) = 0$.

Anschließend betrachten wir $t \mapsto J(\tilde{u} + s(t)\varphi_0 + t\varphi_1)$ und finden

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} J(\tilde{u} + s(t)\varphi_0 + t\varphi_1) &= \int_{\Omega} \left(F_u(\cdot, \tilde{u}, D\tilde{u}) - \nabla_x \cdot F_p(\cdot, \tilde{u}, D\tilde{u}) \right) (s'(t)\varphi_0 + \varphi_1) \, dx \\ &= \int_{\Omega} H(\cdot, \lambda_0) (s'(t)\varphi_0 + \varphi_1) \, dx = \left(h + \mathcal{O}(\varepsilon) (s'(t) + 1) \right) \int_{B_\varepsilon(x_0)} \varphi_0(x) \, dx. \end{aligned}$$

Weil h ungleich 0 ist, ist diese Ableitung ungleich 0 und \tilde{u} ist kein Minimum, jedenfalls nicht, wenn man ε genügend klein wählt. ■

3.4 Beispiele für Randbedingungen

3.4.1 Wäscheleine und Membrane oder wie die Dimension eingreift

Die Minimallänge einer Wäscheleine in einer Dimension oder die Minimalfläche in zwei Dimensionen findet man durch das Minimieren von

$$J(u) = \int_{\Omega} \sqrt{1 + |\nabla u|^2} dx.$$

Für kleine Gradienten ist dieses Funktional fast wie $|\Omega| + \tilde{J}(u)$, wobei

$$\tilde{J}(u) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} |\nabla u|^2 dx.$$

Wir werden jetzt die Minima von \tilde{J} suchen für radialsymmetrische u , die definiert sind auf $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n; d < |x| < 2\}$ mit den Randbedingungen $u(d) = -1$ und $u(2) = 0$.

Für radialsymmetrische Funktionen findet man $|\nabla u| = \left| \frac{x}{|x|} u'(|x|) \right| = |u'|$ und

$$\tilde{J}(u) = \omega_n \int_{r=d}^2 \frac{1}{2} |u'(r)|^2 r^{n-1} dr$$

und die Euler-Lagrange Gleichung liefert $(r^{n-1} u'(r))' = 0$. Es folgt, wenn man die Randwerte benutzt, dass

$$u(r) = \begin{cases} -\frac{2-r}{2-d} & \text{für } n = 1, \\ -\frac{\log(r/2)}{\log(d/2)} & \text{für } n = 2, \\ -\frac{r^{2-n} - 2^{2-n}}{d^{2-n} - 2^{2-n}} & \text{für } n > 2. \end{cases}$$

Wenn man jetzt $d \downarrow 0$ gehen lässt, konvergieren die Funktionen nur zu etwas nicht Trivialem, wenn $n = 1$. Man kann so vermuten, dass die Bedingung $u(0) = -1$ nur in einer Dimension einen Sinn ergibt.

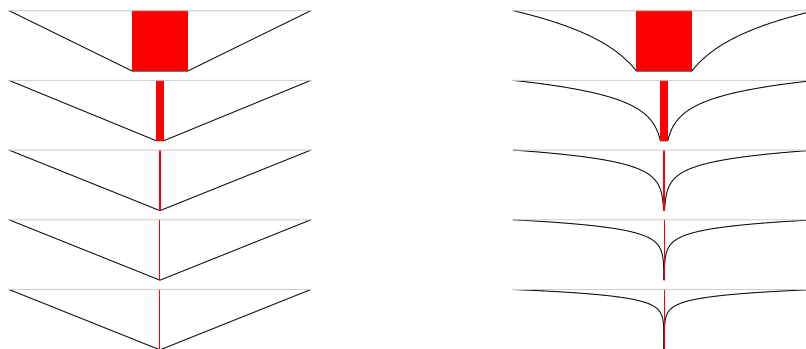


Abbildung 3.3: Minimum für $n = 1$ und (radialsymmetrisch dargestellt) für $n = 2$.

3.4.2 Natürliche Randbedingungen bei einer Plattengleichung

Wenn $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein zwei-dimensionales Gebiet beschreibt und man betrachtet dieses Gebiet als elastische Platte, die durchbiegt unter vertikalen Kräften mit Dichte f , und setzen wir u für die Auslenkung, dann findet man als einfaches Modell das folgende Energiefunktional:

$$E(u; \Omega) = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} (\Delta u)^2 + (1 - \sigma) (u_{xy}^2 - u_{xx}u_{yy}) + f u \right) dx dy. \quad (3.8)$$

Dabei ist σ die sogenannte Poissonzahl³. Man kann dabei Randbedingungen betrachten, die von verschiedenen mechanischen Konstruktionen hervorgebracht werden. Ein paar Beispiele sind:

1. Eingespannt⁴: $u = \frac{\partial}{\partial n} u = 0$.
2. Gelenkig gelagert⁵: $u = 0$.
3. Symmetrieansatz: $\frac{\partial}{\partial n} u = 0$.
4. Frei: keine Bedingung vorgeschrieben.

Mit eingespannt soll man das Bild eines Schraubstockes für Augen haben. Mit gelenkig meint man, dass die Position aber nicht der Winkel am Rand fixiert ist, so wie die Scharniere einen Tür halten.

Wenn wir zum Beispiel $\Omega = (-1, 1) \times (0, 1)$ nehmen, eingespannt für $y = 0$, gelenkig gelagert für $x = \pm 1$ und frei für $y = 1$ und dazu f symmetrisch bezüglich $x = 0$ ansetzen, können wir $E(u, \Omega^*)$ betrachten mit $\Omega^* = (0, 1)^2$ und

$$u \in \mathcal{C} = \{u \in C^2([0, 1]^2); Bu = 0\}.$$

Die Randbedingungen werden mit $Bu = (u|_{I \cup II}, (u_y)|_I, (u_x)|_{IV})$ festgelegt. Hier sind $I = \partial\Omega^* \cap [y = 0]$, $II = \partial\Omega^* \cap [x = 1]$, $III = \partial\Omega^* \cap [y = 1]$ und $IV = \partial\Omega^* \cap [x = 0]$ die vier geraden Randteile.

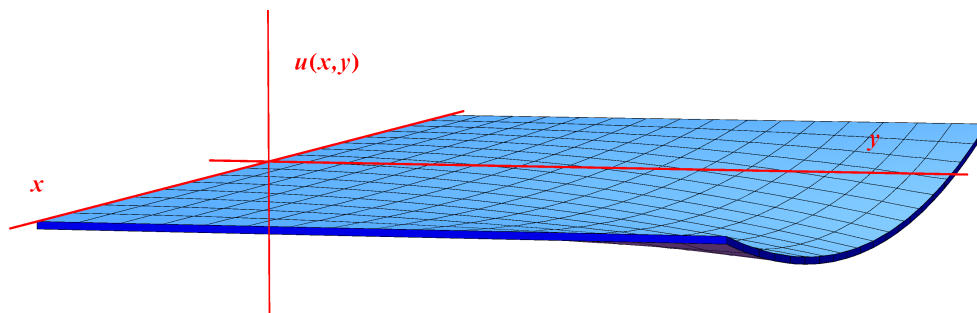


Abbildung 3.4: Vorstellung einer Platte, die durch ihr eigenes Gewicht durchbiegt. Links ist sie eingespannt, vorne und hinten ist sie gelenkig gelagert und rechts frei.

Aufgabe 10 Finde die natürlichen Randbedingungen, die zusätzlich zu $Bu = 0$ kommen. Was genau in den Ecken passiert, lassen wir sein.

³Leider wird im deutschen Sprachraum das Wort Poissonzahl für verschiedene Größen verwendet. Wir meinen hier die Zahl, die man auf englisch Poisson-Ratio nennt. Sie ist definiert durch $\sigma = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$, wobei λ, μ vom Material abhängige Konstanten sind, die beziehungsweise mit dem Zusammendrücken/Ausrenken und mit der Torsion zu tun haben. Normalerweise hat man $\lambda \geq 0$ und $\mu > 0$, und deshalb gilt meistens $0 \leq \sigma < \frac{1}{2}$. Für Metalle liegt σ rund 0.3. Für Gummi liegt σ bei 0.5.

⁴eingespannt = *clamped*

⁵gelenkig gelagert = *hinged*