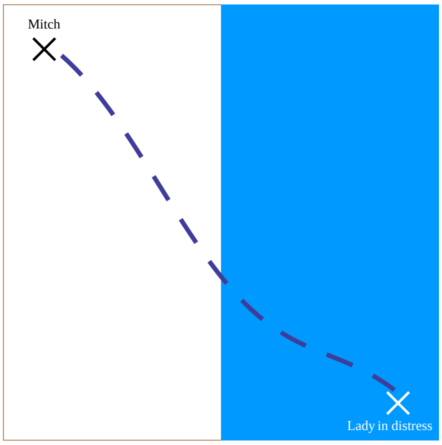
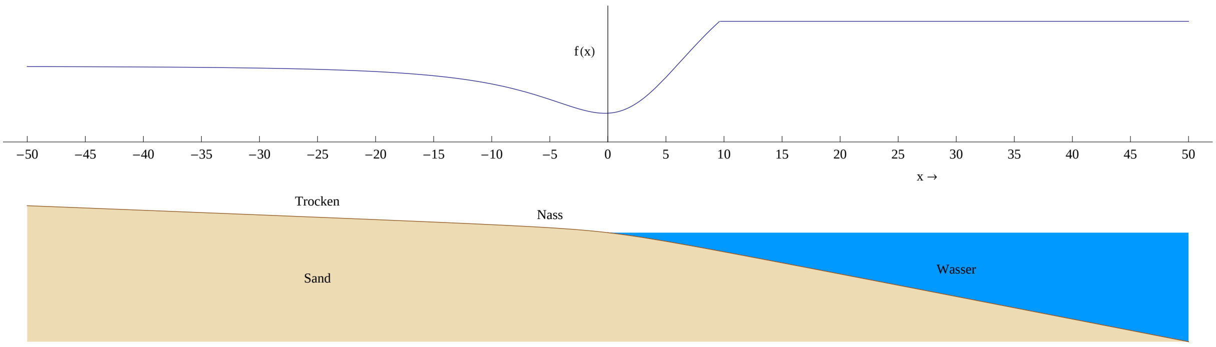
Aufgaben der Klausur in Variationsrechnung vom 7. Februar 2012

1. Mitch Buchannon weiß, dass man rennend auf nassem Sand schneller vorankommt als auf trockenem Sand. Und schwimmen geht langsamer als rennen. Der Querschnitt seines Strandes (nur abhängig von x, dem Abstand zur Wasserlinie) und die zugehörige Geschwindigkeitsbegrenzungsfunktion $x \mapsto f(x)$ sehen aus wie im Bild unten. Mit dieser Funktion ist folgendes gemeint: Wenn man einen Abstand x zur Wasserlinie hat, dann ist dort die Geschwindigkeit v nach oben begrenzt durch

$$v\ f(x) \leq 1.$$





Eine junge Dame, die es zu retten gilt, strampelt an der Stelle $(50, -100)$. Mitch befindet sich an der Stelle $(-50, 0)$ und rennt/schwimmt mit Höchstgeschwindigkeit auf dem schnellsten Weg zu der jungen Dame. Er nimmt an, dass dieser Weg sich durch $(x, u(x))$ parametrisieren lässt und betrachtet die Zeit T, die er braucht, als Funktion von u:

$$T(u) = \int_{-50}^{50} \sqrt{1 + u'(x)^2} f(x)\, dx.$$

(a) Eine angewandte Frage, um zu sehen, ob Sie das Modell verstehen: Wie weit von der Wasserlinie entfernt fängt er an zu schwimmen?

(b) Wie lautet die schwache Euler-Lagrange-Gleichung?

(c) Wenn wir annehmen, dass die Lösung u in $C^2[-50, 50]$ liegt, welches Randwertproblem liegt vor?

(d) Berechnen Sie u soweit wie möglich und geben Sie an, wie die Randwerte zu berücksichtigen sind.

2. Sei $B_1(0)$ die Einheitskugel in $\mathbb{R}^n$. Wir definieren $J : W^{1,2}(B_1(0)) \to \mathbb{R}$ durch

$$J(u) := \int_{B_1(0)} \left(\tfrac{1}{2} |\nabla u(x)|^2 - u(x)\right) dx + \int_{\partial B_1(0)} \tfrac{1}{2} (u(x))^2\, d\sigma_x.$$

Welches Randwertproblem löst ein Minimierer von J, der sogar in $C^2\left(\overline{B_1(0)}\right)$ liegt?

3. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^5$ ein beschränktes Gebiet. Beweisen Sie, dass $J : W_0^{1,2}(\Omega) \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$J(u) = \int_\Omega \left(\tfrac{1}{2} |\nabla u(x)|^2 + \cos(u(x)) \right) dx,$$

mindestens ein Minimum hat in $W_0^{1,2}(\Omega)$.

4. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^\infty$.

   (a) Für welche Dimensionen n gilt $W^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^5(\Omega)$?

   (b) Wie lautet die Definition von $\|.\|_{C^{0,\frac{1}{4}}(\overline{\Omega})}$?

   (c) Für welche Dimensionen n gilt $W^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\frac{1}{4}}\left(\overline{\Omega}\right)$?

5. Sei $B_1(0)$ die Einheitskugel in $\mathbb{R}^n$.

   (a) Ist die folgende Aussage wahr oder falsch? Begründen Sie Ihre Antwort.
   Es gibt $C > 0$ derart, dass

$$\|u\|_{L^2(B_1(0))} \leq C \, \||\nabla u|\|_{L^2(B_1(0))} \text{ für alle } u \in W_0^{1,2}(B_1(0)).$$

   (b) Zeigen Sie, dass

$$\int_{-1}^{1} u(x)^2 \, dx \leq 2 \int_{-1}^{1} u'(x)^2 \, dx \text{ für alle } u \in C^1[-1,1] \cap C_0[-1,1].$$

   (c) Gilt für jede beliebige Dimension n, dass

$$\|u\|_{L^2(B_1(0))} \leq \sqrt{2} \, \||\nabla u|\|_{L^2(B_1(0))} \text{ für alle } u \in W_0^{1,2}(B_1(0))\,?$$

   Begründen Sie Ihre Antwort.

6. Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x,y) = \frac{1}{4}\left(\sqrt{x^2+1} + x\right) e^{-\left(\frac{4}{5}y - \frac{x^2}{50}\right)^2} - e^{-(x-1)^2-(y-2)^2} - e^{-(x-1)^2-(y+2)^2},$$

hat zwei Minima und keine sonstigen stationären Punkte. Wieso steht das nicht im Widerspruch zum „Mountain-Pass"-Theorem? Genauer: Formulieren Sie eine wesentliche Bedingung des Theorems, die nicht erfüllt ist, und begründen Sie kurz wieso. Zur Illustration finden Sie hier zwei Bilder dieser Funktion.