Aufgaben der Nachklausur in Variationsrechnung vom 13. März 2012

1. Wir betrachten den Hilbertraum

$$H = \left\{ u \in W^{2,2}\left((0,3)\right); u\left(0\right) = u'\left(0\right) = 0 \right\}.$$

   (a) Zeigen Sie, dass $\left\| u \right\|_{L^2((0,3))} \leq 3 \left\| u' \right\|_{L^2((0,3))}$ gilt für alle $u \in H \cap C^2\left([0,3]\right)$.

   (b) Gilt auch $\left\| u \right\|_{L^2((0,3))} \leq 3 \left\| u'' \right\|_{L^2((0,3))}$ für alle $u \in H \cap C^2\left([0,3]\right)$?

   (c) Begründen Sie kurz, warum durch $\left\| u \right\|_H := \left\| u'' \right\|_{L^2((0,3))}$ eine zur $W^{2,2}\left((0,3)\right)$–Norm äquivalente Norm auf H definiert wird.

2. Mitch Buchannon möchte wissen, wie sich ein Sprungbrett durchbiegt. Er denkt eindimensional und überlegt sich dazu folgendes Energiefunktional:

$$J\left(u\right) = \int_0^3 \left(\tfrac{1}{2} u''\left(x\right)^2 - f\left(x\right) u\left(x\right) \right) dx.$$

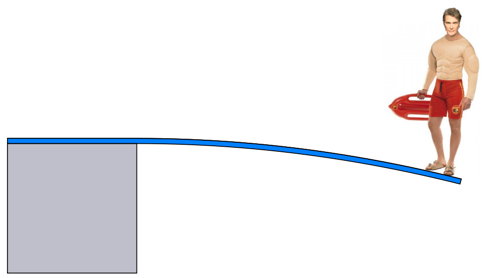
   Hier ist u die Auslenkung bezüglich der Horizontalen und $f \in L^\infty\left((0,3)\right)$ die Gewichtsverteilung. Das Brett ist 4 lang und zwischen -1 und 0 auf Beton festgeleimt.

   (a) Welche Randbedingungen muss man in 0 bzw. 3 für ein passendes Modell vorschreiben, und welche bekommt man als natürliche Randbedingungen? Wieso passt der Hilbertraum aus Aufgabe 1 zu diesem Modell?

   (b) Hat J ein Infimum auf diesem Hilbertraum?

   (c) Welche Differentialgleichung erfüllt das Minimum?

   (d) Hat J ein Minimum auf diesem Hilbertraum?



3. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^\infty$. Begründen Sie, wieso $J : W_0^{1,2}\left(\Omega\right) \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$J\left(u\right) = \int_\Omega \left(\tfrac{1}{2} \left|\nabla u\left(x\right)\right|^2 + \frac{1}{\sqrt{u\left(x\right)^2 + 1}} \right) dx,$$

   ein Minimum hat in $W_0^{1,2}\left(\Omega\right)$.

4. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^\infty$ und sei $f \in W_0^{1,2}\left(\Omega\right)$. Das Funktional $J : W_0^{1,2}\left(\Omega\right) \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$J\left(u\right) = \int_\Omega \left(\tfrac{1}{2} \left|\nabla u\left(x\right)\right|^2 + f\left(x\right) u\left(x\right) \right) dx,$$

   hat ein Minimum $\tilde{u} \in W_0^{1,2}\left(\Omega\right)$.

   (a) Für welche $k \in \mathbb{N}$ gilt $\tilde{u} \in W^{k,2}\left(\Omega\right)$?

   (b) Gilt $\tilde{u} \in W_0^{2,2}\left(\Omega\right)$?

5. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^\infty$.

   (a) Für welche $p \in [1, \infty]$ gilt $W^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$?

   (b) Für welche $\gamma \in [0, 1]$ gilt $W^{2,2}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\gamma}\left(\overline{\Omega}\right)$?

   Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

6. Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x, y) = \frac{1}{40}\left(x^3 - 10\sin(x) + 3y^2 + 4e^{-x^2-y^2-2y}\right),$$

   ist hier dargestellt mittels Graph und mittels Höhenlinien. Wie viele stationäre Punkte dieser Funktion f kann man begründen?