**Prof. Guido Sweers**
**Matthias Erven**

**WS 2011/2012**

# Variationsrechnung
## Übungsblatt 0

**Aufgabe 1:** Im folgenden Beispiel soll der Unterschied zwischen Gâteaux- und Fréchet–Differenzierbarkeit eines Funktionals $J : X \to \mathbb{R}$ verdeutlicht werden. Dazu wählen wir als Beispiel $X = \mathbb{R}$ und

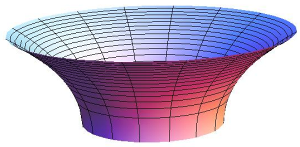
$$J(u,v) = \begin{cases} \left(\frac{uv^2}{u^2+v^4}\right)^2 & \text{für } (u,v) \neq (0,0)\,, \\ 0 & \text{für } (u,v) = (0,0)\,. \end{cases}$$

a) Zeigen Sie, dass $J$ Gâteaux–differenzierbar in $(0,0)$ ist.

b) Zeigen Sie, dass $J$ nicht Fréchet–differenzierbar $(0,0)$ ist.

c) In Analysis II haben Sie verschiedene Differenzierbarkeits-Begriffe für Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ kennengelernt. Welchem dieser Begriffe entspricht Gâteaux-, welchem Fréchet–Differenzierbarkeit?

**Aufgabe 2:** Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet und $u \in C\left(\overline{\Omega}\right)$. Dann wird durch



$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ u(x,y) \end{pmatrix}$$

eine Oberfläche im $\mathbb{R}^3$ parametrisiert. Aus Analysis III sei bekannt, dass der Inhalt dieser Oberfläche berechnet werden kann durch

$$A(u) = \int_\Omega \sqrt{1 + |\nabla u(x,y)|^2}\, d(x,y)\,.$$

Gesucht wird eine Oberfläche mit minimalem Inhalt, eine sogenannte Minimalfläche.

a) Leiten Sie die zugehörige Euler–Lagrange–Gleichung her.

b) Wir nehmen an, dass sowohl $\Omega$ als auch $u$ radialsymmetrisch sind, das heißt, es gebe eine Funktion $U : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ mit $u(x,y) = U(|x,y|)$. Zeigen Sie, dass die Gleichung aus Teil a) für radialsymmetrische Funktionen zur folgenden Gleichung wird:

$$\partial_r \left( \frac{U_r(r)}{\sqrt{1 + |U_r(r)|^2}} \right) + \frac{1}{r} \left( \frac{U_r(r)}{\sqrt{1 + |U_r(r)|^2}} \right) = 0.$$

c) Sei $h > 0$. Berechnen Sie wenn möglich eine Lösung für das Minimalflächenproblem, wenn $\Omega = \{(x,y)\,; 1 < x^2 + y^2 < 4\}$ ist und die Randwerte

$$\begin{cases} u(x,y) = 0 & \text{für } x^2 + y^2 = 1 \\ u(x,y) = h & \text{für } x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

vorgegeben sind.

d) Welchen Wert darf $h$ maximal annehmen, damit eine Lösung $(x,y) \mapsto u(x,y)$ existiert?