Prof. Guido Sweers
Matthias Erven **WS 2011/2012**

Variationsrechnung
Übungsblatt 1

Diese Hausaufgaben werden am Mittwoch, den 19.10.2011 um 13:45 Uhr eingesammelt. Bitte werfen Sie sie in den Briefkasten im Keller des Mathematischen Instituts ein.

Aufgabe 1: Mit Hilfe der Variationsrechnung soll gezeigt werden, dass die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten eine Gerade ist.

a) Es wird nur die kürzeste Verbindung zwischen den Punkten $(0,0)$ und $(1,1)$ gesucht. Nehmen Sie an, dass sich diese durch eine Kurve $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$,

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ u(t) \end{pmatrix} \tag{1}$$

mit $u \in C^2([0,1])$ parametrisieren lässt. Finden Sie dasjenige u, das die Bogenlänge und damit den Abstand der beiden Punkte minimiert.

b) * Streng genommen wurde in Teil 1 nur gezeigt, dass die Gerade die kürzeste Verbindung für alle diejenigen Kurven liefert, die sich wie in (1) parametrisieren lassen. Zeigen Sie, dass die Gerade sogar dann die kürzeste Verbindung zwischen $(0,0)$ und $(1,1)$ darstellt, wenn γ eine beliebige zweimal differenzierbare Kurve mit Startpunkt in $(0,0)$ und Endpunkt in $(1,1)$ ist.

Aufgabe 2: Entscheiden Sie jeweils (mit Beweis), ob $C(A) = \{u : A \to \mathbb{R}; u \text{ ist stetig}\}$ mit

$$\|u\|_\infty := \sup_{x \in A} |u(x)|$$

ein normierter Vektorraum ist für

a) $A = (0,1) \times (0,1)$ b) $A = [0,1] \times [0,1]$ c) $A = [0,1] \times \mathbb{R}$

Aufgabe 3: *Bei der Herleitung der Brachystochrone wurde festgelegt, dass die Anfangsgeschwindigkeit $|\vec{v}| = 0$ ist. Wie sieht die Kurve aus, wenn stattdessen $|\vec{v}| = 1$ gewählt wird?
Lassen Sie die Kurve von einem Computeralgebrasystem wie Maple oder Mathematica zeichnen.
Hinweis: Die Kurve $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (t^2, t^3)$ lässt sich in Maple durch

```
plot([t^2, t^3, t=0..1]);
```

darstellen, in Mathematica durch:

```
ParametricPlot[{t^2,t^3},{t,0,1}]
```

*unbewertete Zusatzaufgabe