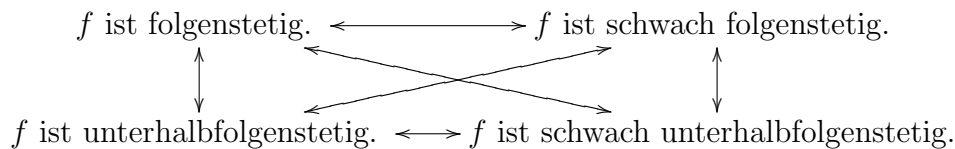


Variationsrechnung
Übungsblatt 10

Diese Hausaufgaben werden am Mittwoch, den 21.12.2011 um 13:45 Uhr eingesammelt. Bitte werfen Sie Ihre Lösung in den Briefkasten im Keller des Mathematischen Instituts ein.

Aufgabe 1: (0 Punkte) \Leftarrow, \Rightarrow oder \Leftrightarrow ?

Sei X ein normierter Vektorraum und $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Setzen Sie im folgenden Diagramm jeweils statt der Pfeile die richtigen Symbole ein (soweit möglich). Beweisen Sie zwei Ihrer Aussagen.



Aufgaben 2-4: In den folgenden Aufgaben setzen wir $\Omega := (0, 1)^2$ und betrachten das Funktional $J : W_0^{1,2}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$, das definiert ist durch

$$J(u) := \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx.$$

Aufgabe 2: (4 Punkte) Ist J folgenstetig?

Zeigen Sie, dass J folgenstetig ist.

Aufgabe 3: (8 Punkte) Ist J schwach folgenstetig?

Wir definieren für $k \in \mathbb{N}$ die Funktion $u_k : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$u_k(x, y) := \frac{1}{k} \sin(2k\pi x) \sin(2k\pi y).$$

- Zeigen Sie, dass $u_k \in W_0^{1,2}(\Omega)$ gilt für alle $k \in \mathbb{N}$.
- Berechnen Sie $J(u_k)$.

Die Folge $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ konvergiert schwach gegen 0.

- Ist J schwach folgenstetig?

Aufgabe 4: (8 Punkte) Ist J schwach unterhalbfolgenstetig?

Für $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ definieren wir das Funktional $H_u : W_0^{1,2}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$H_u(v) := \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx$$

- Zeigen Sie, dass H_u stetig ist.

Es soll gezeigt werden, dass J schwach unterhalbfolgenstetig ist. Dazu sei $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ und $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $W_0^{1,2}(\Omega)$ mit $u_k \rightharpoonup u$.

- Zeigen Sie, dass gilt

$$J(u_k) - J(u) = \int_{\Omega} (|\nabla(u_k - u)|^2 + 2\nabla u \nabla u_k - 2|\nabla u|^2) dx.$$

- Zeigen Sie, dass J schwach unterhalbfolgenstetig ist.

Aufgabe 5: (0 Punkte) Kompakte Operatoren

- Es seien X und Y Banachräume und $L : X \rightarrow Y$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie: L ist kompakt genau dann, wenn $L(B_1(0))$ präkompakt ist.
- Ist $L : C^1([0, 1]) \rightarrow C^0([0, 1])$, $Lu := u'$ kompakt?