Prof. Guido Sweers **WS 2011/2012**
Matthias Erven

Variationsrechnung
Übungsblatt 10

Diese Hausaufgaben werden am Mittwoch, den 21.12.2011 um 13:45 Uhr eingesammelt. Bitte werfen Sie Ihre Lösung in den Briefkasten im Keller des Mathematischen Instituts ein.

Aufgabe 1: (0 Punkte) $\Leftarrow$, $\Rightarrow$ oder $\Leftrightarrow$?
Sei X ein normierter Vektorraum und $f : X \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Setzen Sie im folgenden Diagramm jeweils statt der Pfeile die richtigen Symbole ein (soweit möglich). Beweisen Sie zwei Ihrer Aussagen.

$$\begin{tikzcd}
f \text{ ist folgenstetig.} \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[d, leftrightarrow] \arrow[dr, leftrightarrow] & f \text{ ist schwach folgenstetig.} \arrow[d, leftrightarrow] \arrow[dl, leftrightarrow] \\
f \text{ ist unterhalbfolgenstetig.} \arrow[r, leftrightarrow] & f \text{ ist schwach unterhalbfolgenstetig.}
\end{tikzcd}$$

Aufgaben 2-4: In den folgenden Aufgaben setzen wir $\Omega := (0,1)^2$ und betrachten das Funktional $J : W_0^{1,2}(\Omega) \to \mathbb{R}$, das definiert ist durch

$$J(u) := \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx.$$

Aufgabe 2: (4 Punkte) Ist J folgenstetig?
Zeigen Sie, dass J folgenstetig ist.

Aufgabe 3: (8 Punkte) Ist J schwach folgenstetig?
Wir definieren für $k \in \mathbb{N}$ die Funktion $u_k : \Omega \to \mathbb{R}$ durch

$$u_k(x,y) := \frac{1}{k} \sin(2k\pi x) \sin(2k\pi y).$$

a) Zeigen Sie, dass $u_k \in W_0^{1,2}(\Omega)$ gilt für alle $k \in \mathbb{N}$.
b) Berechnen Sie $J(u_k)$.

Die Folge $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert schwach gegen 0.

c) Ist J schwach folgenstetig?

Aufgabe 4: (8 Punkte) Ist J schwach unterhalbfolgenstetig?
Für $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ definieren wir das Funktional $H_u : W_0^{1,2}(\Omega) \to \mathbb{R}$ durch

$$H_u(v) := \int_\Omega \nabla u \nabla v \, dx$$

a) Zeigen Sie, dass H_u stetig ist.

Es soll gezeigt werden, dass J schwach unterhalbfolgenstetig ist. Dazu sei $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ und $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $W_0^{1,2}(\Omega)$ mit $u_k \rightharpoonup u$.

b) Zeigen Sie, dass gilt

$$J(u_k) - J(u) = \int_\Omega \left(|\nabla(u_k - u)|^2 + 2\nabla u \nabla u_k - 2|\nabla u|^2 \right) dx.$$

c) Zeigen Sie, dass J schwach unterhalbfolgenstetig ist.

Aufgabe 5: (0 Punkte) Kompakte Operatoren

a) Es seien X und Y Banachräume und $L : X \to Y$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie: L ist kompakt genau dann, wenn $L(B_1(0))$ präkompakt ist.
b) Ist $L : C^1([0,1]) \to C^0([0,1])$, $Lu := u'$ kompakt?