Prof. Guido Sweers
Matthias Erven

WS 2011/2012

Variationsrechnung
Übungsblatt 11

Diese Hausaufgaben werden am Mittwoch, den 11.1.2012, um 13:45 Uhr eingesammelt. Bitte werfen Sie Ihre Lösung in den Briefkasten im Keller des Mathematischen Instituts ein.

Aufgabe 1: (15 Punkte) Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, $f \in L^2(\Omega)$ und $g \in L^2(\partial\Omega)$. Für g gebe es eine Funktion u_g mit $Tu_g = g$. Wir setzen

$$\mathcal{W} := W_0^{1,2}(\Omega) + u_g := \left\{u = u_1 + u_g; u_1 \in W_0^{1,2}(\Omega)\right\}$$

und definieren $J : \mathcal{W} \to \mathbb{R}$ durch

$$J(u) = \int_\Omega \left(\frac{1}{2}|\nabla u|^2 - fu\right) dx.$$

a) Zeigen Sie, dass J koerzitiv ist.

b) Zeigen Sie, dass J schwach unterhalbfolgenstetig ist.

c) Zeigen Sie, dass J ein Minimum in $\mathcal{W}$ besitzt.

Aufgabe 2: (5 Punkte) Wir betrachten wieder J aus Aufgabe 1, diesmal jedoch definiert auf $W^{1,2}(\Omega)$. Besitzt J ein Minimum in $W^{1,2}(\Omega)$?

Aufgabe 3: (0 Punkte) Es sei $\partial\Omega \in C^1$. Falls Sie in Aufgabe 2 herausbekommen haben, dass J kein Minimum in $W^{1,2}(\Omega)$ besitzt, dann wollen wir nun versuchen, zumindest für bestimmte f doch eines zu finden.

a) Zunächst beschränken wir unsere Suche nach einem Minimum auf einen kleineren Raum. Zeigen Sie, dass J ein Minimum besitzt in

$$\mathcal{W}_\emptyset := \left\{u \in W^{1,2}(\Omega); \int_\Omega u\, dx = 0\right\}.$$

Hinweis: Auch in höheren Dimensionen gilt eine Poincaré–Ungleichung, falls der Rand des Gebietes C^1 ist: Es gibt ein $C > 0$, so dass für alle $u \in W^{1,2}(\Omega)$ mit $\overline{u} := |\Omega|^{-1} \int_\Omega u\, dx$ gilt $\int_\Omega (u(x) - \overline{u})^2\, dx \leq C \int_\Omega |\nabla u|^2\, dx$.

b) Es gelte nun $\int_\Omega f\, dx = 0$. Zeigen Sie, dass J ein Minimum in $W^{1,2}(\Omega)$ besitzt.
Hinweis: Berechnen Sie $J(u - \overline{u})$.

Aufgabe 4: (0 Punkte) Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und $f \in L^2(\Omega)$. Existiert ein Minimum für

$$\inf_{u \in W^{1,2}(\Omega)} \int_\Omega \left(|\nabla u|^2 + u^2 - fu\right) dx?$$

Aufgabe 5: (0 Punkte) Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, $c \in \mathbb{R}$ und $f \in L^2(\Omega)$. Unter welchen Bedingungen für c und f existiert ein Minimum für

$$\inf_{u \in W_0^{1,2}(\Omega)} \int_\Omega \left(|\nabla u|^2 - cu^2 - fu\right) dx?$$

(bitte wenden)

Aufgabe 6: (0 Punkte) Es sei $f \in L^2(\Omega)$. Wir betrachten die Funktionale I_0, I_1 und I_2 auf $W_0^{1,2}$, die gegeben sind durch

$$I_0(u) = \int_\Omega \left(\frac{1}{2} |\nabla u|^2 + \frac{u^2}{1+u^2} - fu \right) dx,$$

$$I_1(u) = \int_\Omega \left(\frac{1}{2} |\nabla u|^2 - f^+ u \right) dx \qquad \text{und} \qquad I_2(u) = \int_\Omega \left(\frac{1}{2} |\nabla u|^2 - f^- u \right) dx.$$

Es seien u_i, $i \in \{0,1,2\}$ die zugehörigen Minimierer. Zeigen Sie, dass dann gilt:

a) $u_1, u_2 \geq 0$

b) $-u_2 \leq u_0 \leq u_1$