**Prof. Guido Sweers**
**Matthias Erven** **WS 2011/2012**

# Variationsrechnung
# Übungsblatt 12

Diese Hausaufgaben werden am Mittwoch, den 18.1.2012, um 13:45 Uhr eingesammelt. Bitte werfen Sie Ihre Lösung in den Briefkasten im Keller des Mathematischen Instituts ein.

**Aufgabe 1:** * Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$.

a) Zeigen Sie, dass für alle $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ gilt

$$\int_\Omega (\vec{a} \cdot \nabla u)\, u dx = 0.$$

*Hinweis:* Erinnern Sie sich an die Definition von $W_0^{1,2}(\Omega)$.

b) Es soll ein Vergleichsprinzip für Lösungen der Gleichung

$$\begin{cases} -\Delta u - \vec{a} \cdot \nabla u - f = 0 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

gefunden werden. In der schwachen Formulierung betrachten wir also diejenigen Funktionen $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$, für die

$$\int_\Omega (\nabla u \nabla \varphi - \vec{a} \cdot (\nabla u)\, \varphi - f\varphi)\, dx = 0 \tag{1}$$

gilt für alle $\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$.
Zeigen Sie: Sind $f_1, f_2 \in L^2(\Omega)$ mit $f_1 \geq f_2$, und sind $u_1$ und $u_2$ zugehörige Lösungen von (1), dann gilt $u_1 \geq u_2$.

**Aufgabe 2: Gefrierschrank**
Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit $C^1$–Rand und $f \in L^2(\Omega)$. Ferner sei $b \in L^\infty(\partial\Omega)$ mit $b > 0$. Wir definieren für $u \in W^{1,2}(\Omega)$ das Funktional $J$ durch

$$J_f(u) = \int_\Omega \left(\tfrac{1}{2} |\nabla u|^2 - fu\right) dx + \int_{\partial\Omega} bu^2\, d\sigma_x.$$

a) Angenommen, $J_f$ hat einen Minimierer $u$, für den sogar $u \in C^2\left(\overline{\Omega}\right)$ gilt. Welches Randwertproblem erfüllt $u$?

b) * Wir setzen $n = 3$ und interpretieren $u(x)$ als die Differenz zwischen der Temperatur im Punkt $x$ und der Raumtemperatur außerhalb von $\Omega$. Erklären Sie, warum die in a) erhaltene Gleichung die Temperaturverteilung in einem Gefrierschrank beschreibt.

c) Für $f_1, f_2 \in L^2(\Omega)$ seien $u_1$ und $u_2$ jeweils Minimierer des zugehörigen Funktionals $J_{f_1}$ bzw. $J_{f_2}$. Wir nehmen weiter an, dass $u_1, u_2 \in W^{1,2}(\Omega) \cap C\left(\overline{\Omega}\right)$ gilt. Zeigen Sie: Ist $f_1 \geq f_2$, dann ist $u_1 \geq u_2$.

*(bitte wenden)*

---
*unbewertete Zusatzaufgabe

**Aufgabe 3:** [*] Die Zerlegung einer Funktion $u$ in Positiv- und Negativteil, $u = u^+ - u^-$, hat für Funktionen $u \in W^{1,2}(\Omega)$ die vorteilhafte Eigenschaft, dass sogar $u^+, u^- \in W^{1,2}(\Omega)$ gilt. Für Funktionen $u \in W^{2,2}(\Omega)$ gilt das entsprechende Ergebnis nicht. In manchen Fällen kann man aber eine ähnliche Zerlegung mit ähnlichen Eigenschaften finden.
Wir setzen $\Omega := (0,1)$ und betrachten $\mathcal{W} := W^{2,2}(\Omega) \cap W_0^{1,2}(\Omega)$.

a) Rufen Sie sich in Erinnerung, dass durch

$$\|u\|_* := \sqrt{\int_0^1 (u'')^2 \, dx}$$

eine zur Standardnorm äquivalente Norm auf $\mathcal{W}$ definiert wird.

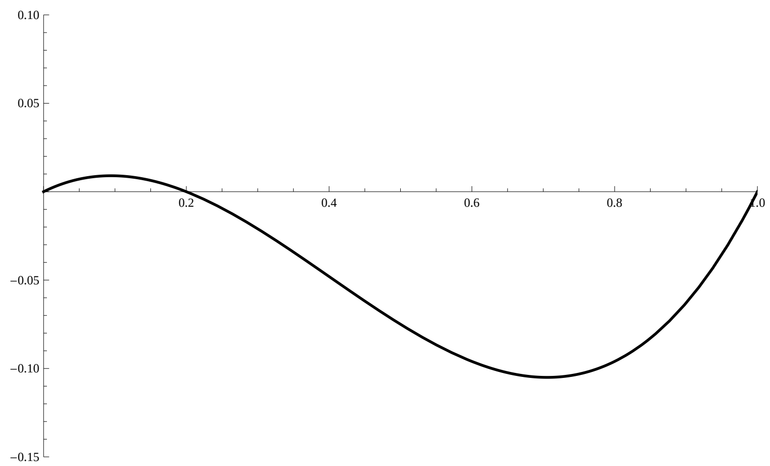
b) Zeigen Sie, dass es eindeutige Funktionen $u_1, u_2 \in \mathcal{W}$ gibt mit

$$u_1'' = -(u'')^- \qquad \text{und} \qquad u_2'' = -(u'')^+ .$$

Zeigen Sie weiter, dass $u_1$ und $u_2$ die folgenden Eigenschaften besitzen:

(i) $u = u_1 - u_2$.
(ii) $u_1 \geq 0$ und $u_2 \geq 0$.
(iii) $\|u\|_*^2 = \|u_1\|_*^2 + \|u_2\|_*^2$.

c) Unten sehen Sie einen Plot der Funktion $u(x) = x(x-1)\left(x - \frac{1}{5}\right)$. Berechnen Sie $u_1$ und $u_2$ und zeichnen Sie die Funktionen $u_1$ und $-u_2$ im Plot ein.




### Anmeldung zur Klausur

Die Anmeldung zur Klausur ist ab sofort und bis zum 31. Januar um 12 Uhr möglich. Auf der Webseite erhalten Sie die dazu nötigen Formulare und weitere Informationen.

---

[*] unbewertete Zusatzaufgabe