Prof. Guido Sweers
Matthias Erven

WS 2011/2012

Variationsrechnung
Übungsblatt 13

Diese Hausaufgaben werden am Mittwoch, den 25.1.2012, um 13:45 Uhr eingesammelt. Bitte werfen Sie Ihre Lösung in den Briefkasten im Keller des Mathematischen Instituts ein.

Aufgabe 1: Wir definieren $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$F(t) := \frac{t^2(t^2-3)}{t^2+1}$$

und betrachten $J : W_0^{1,2}(0,1) \to \mathbb{R}$ mit

$$J(u) := \int_0^1 F(u'(x))\,dx.$$

a) Zeigen Sie, dass J wohldefiniert ist.

b) Skizzieren Sie F und berechnen Sie die Minima von F.

c) Zeigen Sie, dass J ein Minimum in $W_0^{1,2}(0,1)$ besitzt. Ist dieses Minimum eindeutig?

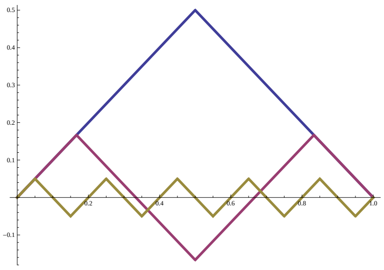
d) Zeigen Sie, dass ein Minimum für J in $W_0^{1,2}(0,1)$ nicht klassisch differenzierbar ist.

e) Wir definieren $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$s(x) := \tfrac{1}{\pi}\arcsin(\sin(\pi x))$$

und $u_k \in W_0^{1,2}(0,1)$ für $k \in \mathbb{N}$ durch

$$u_k(x) := \tfrac{1}{k}s(kx).$$



Rechts sehen Sie Skizzen von u_1, u_3 und u_{10}. Zeigen Sie, dass $u_k \rightharpoonup 0$ für $k \to \infty$.
Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass

$$\lim_{k\to\infty}\int_0^1 g'(x)\,u_k'(x)\,dx = 0$$

für $g \in C_c^\infty(0,1)$ gilt. $W_0^{1,2}(0,1)$ ist ein Hilbertraum mit dem Skalarprodukt

$$(w,v)_{W_0^{1,2}(0,1)} = \int_0^1 w'(x)\,v'(x)\,dx.$$

f) Verwenden Sie die Folge aus e) um zu zeigen, dass J nicht schwach unterhalbfolgenstetig ist.

Aufgabe 2: * Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex und stetig differenzierbar. Zeigen Sie, dass f' dann wachsend ist.

*unbewertete Zusatzaufgabe