Prof. Guido Sweers **WS 2011/2012**
Matthias Erven

Variationsrechnung
Übungsblatt 2

Diese Hausaufgaben werden am Mittwoch, den 26.10.2011, um 13:45 Uhr eingesammelt. Bitte werfen Sie Ihre Lösung in den Briefkasten im Keller des Mathematischen Instituts ein.

Aufgabe 1: * Wir wollen eine Funktion χ basteln, die die im Beweis von Lemma 2.5.1 geforderten Eigenschaften hat.

a) Zeigen Sie, dass $j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$j(x) := \begin{cases} e^{\frac{1}{x^2-1}} & \text{für } |x| < 1 \\ 0 & \text{für } |x| \geq 1 \end{cases}$$

in $C_c^\infty(\mathbb{R})$ liegt.

b) Wir definieren $j_\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ für $\varepsilon > 0$ durch

$$j_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon} j\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

Zeigen Sie, dass $j_\varepsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ und $\operatorname{supp} j_\varepsilon = [-\varepsilon, \varepsilon]$ gilt. Zeigen Sie auch, dass

$$\int_{\mathbb{R}} j_\varepsilon(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} j(x)\, dx =: \omega$$

gilt unabhängig von $\varepsilon > 0$.

c) Wir definieren $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x < \frac{1}{2}, \\ 1 & \text{für } x \geq \frac{1}{2}, \end{cases}$$

und für $\varepsilon > 0$ definieren wir $\varphi_\epsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$\varphi_\varepsilon(x) := \frac{1}{\omega}(j_\varepsilon * f)(x) := \frac{1}{\omega}\int_{\mathbb{R}} j_\varepsilon(x-y) f(y)\, dy.$$

Zeigen Sie, dass $\varphi_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R})$ gilt für alle $\varepsilon > 0$ und dass φ_ε monoton wachsend ist.

d) Bestimmen Sie ein $\varepsilon_0 > 0$, so dass $\varphi_{\varepsilon_0}(x) = 0$ für $x \leq \frac{1}{10}$ und $\varphi_{\varepsilon_0}(x) = 1$ für $x \geq \frac{9}{10}$ gilt.

Aufgabe 2: Wir betrachten noch einmal das Beispiel 2.6.3. In diesem geht es um das Funktional

$$J(u) := \int_{-1}^{1} \left(1 - (u'(x))^2\right)^2 dx,$$

für welches ein Minimum im Raum $\mathcal{C} := C^1[-1,1] \cap C_0[-1,1]$ gesucht wird. Die zugehörige Euler–Lagrange–Gleichung ist

$$-4\left(\left(1-(u'(x))^2\right)u'(x)\right)' = 0.$$

Wir definieren die Funktionen $u_n, v : [-1,1] \to \mathbb{R}$ durch

$$u_n(x) := \begin{cases} 1+x & \text{für } x < -\frac{1}{2n} \\ 1 - \frac{1}{4n} - nx^2 & \text{für } |x| \leq \frac{1}{2n} \\ 1-x & \text{für } x > \frac{1}{2n} \end{cases} \qquad \text{und} \qquad v(x) := 0.$$

*unbewertete Zusatzaufgabe

a) Zeigen Sie, dass $u_n \in \mathcal{C}$ und $v \in \mathcal{C}$ gilt und dass $J(u_n) < J(v)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

b) Zeigen Sie, dass die Euler–Lagrange–Gleichung durch v, jedoch aber durch keines der u_n gelöst wird. Wieso ist dies kein Widerspruch zu Theorem 2.3.1?

c) Zeigen Sie, dass J in $\mathcal{C}$ keinen Minimierer besitzt.

Aufgabe 3: Wir betrachten $\mathcal{C} := C^1[-1,1]$ und das Funktional $J : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$, das gegeben ist durch

$$J(u) = \int_{-1}^{1} \left(u'(x) - 2|x|\right)^2 dx.$$

Zeigen Sie, dass man durch $u(x) = x|x|$ ein Minimierer in $\mathcal{C}$ bekommt. Dieser ist nicht in $C^2[-1,1]$. Wieso ist dies kein Widerspruch zu Theorem 2.6.1?

Aufgabe 4: * Wir betrachten eine Seifenblase zwischen einem halben Ring mit Radius 1 und einer glatten Wand, die durch einen konstanten, einseitig größeren Luftdruck aufgeblasen wird. Dazu setzen wir $\Omega := \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; x_1^2 + x_2^2 < 1 \text{ und } x_1 > 0\}$. Die Oberfläche wird parametrisiert durch den Minimierer von

$$J(u) := \int_\Omega \left(\sqrt{1 + |\nabla u(x)|^2} - pu(x)\right) dx$$

im Raum $\mathcal{C} := \left\{u \in C^1\left(\overline{\Omega}\right); u(x) = 0 \text{ für } x \in \partial\Omega \text{ mit } |x| = 1\right\}$.

a) Leiten Sie die zugehörige Euler–Lagrange–Gleichung her.

b) Wie lauten die Randbedingungen, die erfüllt werden müssen? Welche natürliche Randbedingung ist hinzugekommen?

*unbewertete Zusatzaufgabe