Prof. Guido Sweers
Matthias Erven **WS 2011/2012**

Variationsrechnung
Übungsblatt 3

Diese Hausaufgaben werden am Mittwoch, den 2.11.2011, um 13:45 Uhr eingesammelt. Bitte werfen Sie Ihre Lösung in den Briefkasten im Keller des Mathematischen Instituts ein.

Aufgabe 1: (5 Punkte) Die Zeit, die ein Teilchen auf der durch $(x, u(x))$ parametrisierten Achterbahn aus Abschnitt 1.1 verbringt, ist gegeben durch

$$T(u) = \int_0^6 \sqrt{\frac{1 + (u'(x))^2}{2gu(x)}}\, dx.$$

Wir suchen diesmal diejenige Achterbahn, für die ein Teilchen, das in $(0,0)$ startet, die kürzeste Zeit braucht, um bei $x = 6$, also im Punkt $(6, ?)$ anzukommen.

a) Welche Randbedingung(en) gelten für u? Welche natürliche(n) Randbedingung(en) treten auf?

b) * Skizzieren Sie die gesuchte Achterbahn.

Aufgabe 2: (10 Punkte) Wir betrachten ein Seil der Länge 3, das an den Stellen $(-1, 0)$ und $(1, 0)$ aufgehängt ist und aufgrund der Schwerkraft durchhängt. Die Auslenkung des Seiles werde durch $(x, (u(x))$ mit $u \in C^2[-1, 1]$ beschrieben. Die Gesamtenergie des Systems ist dann gegeben durch

$$E(u) = \int_{-1}^{1} u(x) \sqrt{1 + (u'(x))^2}\, dx.$$

Die Kurve, die das Seil beim Durchhängen beschreibt, ist diejenige, für die die Energie minimal wird. Wir wollen diese Kurve berechnen unter der Bedingung, dass die (Bogen–)Länge des Seiles konstant bleibt.

a) Zeigen Sie, dass das gesuchte u die Gleichung

$$\left((u - \lambda) \frac{u'}{\sqrt{1 + (u')^2}} \right)' = \sqrt{1 + (u')^2}$$

für ein $\lambda \in \mathbb{R}$ löst.

b) Formen Sie diese Gleichung um zu

$$(u - \lambda)\, u'' = 1 + (u')^2 . \tag{1}$$

c) Zeigen Sie, dass (1) gelöst wird durch $u(x) = \frac{1}{c} \cosh(cx + d) + \lambda$.

d) Wie lauten die Randbedingungen? Berechnen Sie d und λ in Abhängigkeit von c.

e) Finden Sie numerisch c heraus und lassen Sie die Kurve plotten.

---

*unbewertete Zusatzaufgabe

Aufgabe 3: [*] Wir betrachten die Vorhangschiene unter der Einwirkung einer Kraft aus Abschnitt 3.2.1, deren Energie durch

$$J(u) = \int_{-1}^{1} \left(\frac{1}{2} (u'')^2 - fu \right) dx$$

mit $f \in C[-1,1]$ beschrieben wird. Wir suchen einen Minimierer u, für den wir folgende Eigenschaften annehmen:

$$\begin{array}{ccc} u(-1) = 0, & u(0) = 0, & u(1) = 0, \\ u|_{[-1,0]} \in C^4[-1,0], & u \in C^2[-1,1], & u|_{[0,1]} \in C^4[0,1]. \end{array}$$

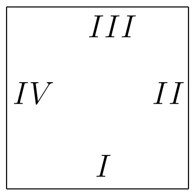
Testen Sie mit Funktionen in

$$\{\varphi \in C^\infty[-1,1]; \varphi(-1) = \varphi(0) = \varphi(1) = 0\}$$

und zeigen Sie, dass man auf diese Weise zwei Differentialgleichungen vierter Ordnung bekommt. Welche natürlichen Randbedingungen kommen hinzu?

Aufgabe 4: (5 Punkte) Wir betrachten das Modell einer quadratischen elastischen Platte, die sich unter der Einwirkung einer Kraft durchbiegt. Dazu setzen wir $\Omega := (0,1) \times (0,1)$ und schreiben $u(x,y)$ für die Auslenkung an der Stelle $(x,y) \in \Omega$. Die Kraft(dichte) sei gegeben durch f, und σ stehe für die Poissonzahl. Das Energiefunktional ist gegeben durch

$$E(u) = \int_\Omega \left(\tfrac{1}{2} (\Delta u)^2 + (1-\sigma) \left(u_{xy}^2 - u_{xx} u_{yy} \right) + fu \right) d(x,y).$$



Wir unterteilen $\partial\Omega$ wie in der Skizze in die vier Bereiche

$$\begin{array}{rr} I = [0,1] \times \{0\}, & II = \{1\} \times (0,1), \\ III = [0,1] \times \{1\}, & IV = \{0\} \times (0,1) \end{array}$$

und legen fest, dass die Platte im Bereich I eingespannt und in den Bereichen II und IV gelenkig gelagert sei. In III sei sie frei. Formulieren Sie die Randbedingungen und leiten Sie die Euler–Lagrange–Gleichung her. Welche natürlichen Randbedingungen kommen hinzu? Die Ecken dürfen Sie hierbei außer Betracht lassen.

[*]unbewertete Zusatzaufgabe