Prof. Guido Sweers **WS 2011/2012**
Matthias Erven

Variationsrechnung
Übungsblatt 5

Diese Hausaufgaben werden am Mittwoch, den 16.11.2011, um 13:45 Uhr eingesammelt. Bitte werfen Sie Ihre Lösung in den Briefkasten im Keller des Mathematischen Instituts ein.

Aufgabe 1: * Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \frac{1}{\|x\|^2 + \|x\|^4} \text{ für } x \neq 0.$$

Für welche $n \in \mathbb{N}^+$ gilt $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$?

Aufgabe 2: * Es seien $(X, \|.\|_X)$ und $(Y, \|.\|_Y)$ normierte Vektorräume. Eine lineare Abbildung $F : X \to Y$ heißt *beschränkt*, wenn es ein $M \geq 0$ gibt mit

$$\|F(x)\|_Y \leq M \|x\|_X \tag{1}$$

für alle $x \in X$. Wir schreiben

$$\|F\|_{L(X,Y)} := \inf\{M \geq 0;\ (1) \text{ gilt für alle } x \in X\}$$

Zeigen Sie:

a) F ist stetig genau dann, wenn F beschränkt ist.

b) Es gilt

$$\begin{aligned}\|F\|_{L(X,Y)} &= \sup\{\|F(x)\|_Y ; x \in X \text{ mit } \|x\|_X \leq 1\} \\ &= \sup\{\|F(x)\|_Y ; x \in X \text{ mit } \|x\|_X = 1\} \\ &= \sup\{\|F(x)\|_Y / \|x\|_X ; x \in X \setminus \{0\}\}.\end{aligned}$$

c) Durch $\|.\|_{L(X,Y)}$ wird eine Norm auf dem Vektorraum $L(X,Y)$ aller stetigen linearen Abbildungen von X nach Y definiert.

Aufgabe 3: (8 Punkte) Lemma 5.1.5 besagt, dass für jede offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit $\lambda(\Omega) < \infty$ und für alle $1 \leq p < q < \infty$ gilt, dass $L^q(\Omega) \subset L^p(\Omega)$. Zeigen Sie, dass dieses Ergebnis optimal ist, indem Sie

a) eine Menge Ω mit $\lambda(\Omega) < \infty$ und eine Funktion $f \in L^p(\Omega)$ angeben, die nicht in $L^q(\Omega)$ liegt;

b) eine Menge Ω mit $\lambda(\Omega) = \infty$ und eine Funktion $f \in L^q(\Omega)$ angeben, die nicht in $L^p(\Omega)$ liegt.

Aufgabe 4: (6 Punkte) Für $p, p' \geq 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ und $\Omega = (0, 2\pi)$ definieren wir $F_{\sin} : L^p(\Omega) \to \mathbb{R}$ mit durch

$$F_{\sin}(f) := \int_0^{2\pi} \sin(x) f(x)\, dx.$$

Berechnen Sie $\|F_{\sin}\|_{(L^p(\Omega))'}$ für $p = 1$, $p = 2$ und $p = \infty$.

(bitte wenden)

*unbewertete Zusatzaufgabe

Aufgabe 5: (6 Punkte) Für $k = 0, 1, \ldots$ definieren wir $f_k : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ durch

$$f_k(x) := \chi_{(k,k+1]}(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \in (k, k+1], \\ 0 & \text{für } x \notin (k, k+1]. \end{cases}$$

Es gilt $f_k \in L^2(\mathbb{R}^+)$.

a) Zeigen Sie, dass die Folge $\{f_k\}_{k=0}^{\infty}$ nicht stark in $L^2(\mathbb{R}^+)$ konvergiert.

b) Zeigen Sie, dass die Folge $\{f_k\}_{k=0}^{\infty}$ schwach in $L^2(\mathbb{R}^+)$ konvergiert. Gegen welche Funktion?
Hinweis: Was gilt für $\lim_{k\to\infty} \int_k^{k+1} g(x)\, dx$, wenn $g \in L^2(\mathbb{R}^+)$?