Prof. Guido Sweers
Matthias Erven **WS 2011/2012**

Variationsrechnung
Übungsblatt 6

Diese Hausaufgaben werden am Mittwoch, den 23.11.2011, um 13:45 Uhr eingesammelt. Bitte werfen Sie Ihre Lösung in den Briefkasten im Keller des Mathematischen Instituts ein.

Aufgabe 1: (8 Punkte) Die Funktion $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ sei auf folgende Art definiert: $g(0) = 0$ und $g(1) = 1$. Das Interval $[0,1]$ wird in drei gleich große Teile geteilt, und auf dem mittleren Teilintervall habe g den durchschnittlichen Wert der beiden Randwerte: $g(x) = \frac{1}{2}$ für $x \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$. Die übrigen Intervalle teilen wir wieder in drei Teile und machen das gleiche: $g(x) = \frac{1}{4}$ für $x \in \left[\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right]$ und $g(x) = \frac{3}{4}$ für $x \in \left[\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right]$. Wieder werden die übrigen Intervalle in drei Teile geteilt und $g(x) = \frac{1}{8}$ für $x \in \left[\frac{1}{27}, \frac{2}{27}\right]$, $g(x) = \frac{3}{8}$ für $x \in \left[\frac{4}{27}, \frac{5}{27}\right]$ und so weiter. Damit ist g auf einer dichten Menge $M \subset [0,1]$ definiert, und für die restlichen x setzen wir $g(x) = \inf\{g(t); t \in M \text{ und } x < t\}$.

Zeigen Sie, dass:

a) * Für $x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k}$ mit $a_k \in \{0,1,2\}$

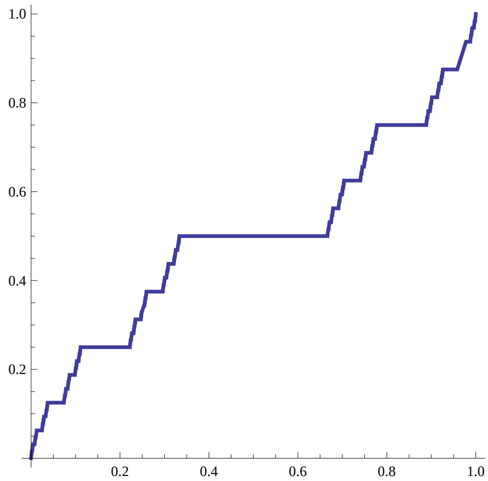
gilt $g(x) = \sum_{k=1}^{\min\{\ell; a_\ell = 1\}} \frac{\min(1, a_k)}{2^k}$.

b) g stetig ist;

c) $g'(x) = 0$ f.ü.;

d) g keine schwache Ableitung auf $(0,1)$ hat.

Bemerkung: Übrigens hat g schon eine schwache Ableitung auf $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, $\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$, $\left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$ usw.



Aufgabe 2: (6 Punkte) Zeigen Sie, dass für schwache Ableitungen von $u, v \in L^1_{loc}(\Omega)$ folgendes gilt:

a) $\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j} u = \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i} u$.
Zeigen Sie also: Wenn die rechte (oder linke) Seite in dieser Gleichung wohldefiniert ist, dann ist auch die linke (rechte) Seite wohldefiniert, und die beiden Seiten sind fast überall gleich.

b) $\frac{\partial}{\partial x_i}(c_1 u + c_2 v) = c_1 \frac{\partial}{\partial x_i} u + c_2 \frac{\partial}{\partial x_i} v$ für $c_i \in \mathbb{R}$;

c) $\frac{\partial}{\partial x_i}(\psi v) = \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\psi\right) v + \psi \left(\frac{\partial}{\partial x_i} v\right)$ für $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$.

d) * $\frac{\partial}{\partial x_i}(\psi(u)) = \psi'(u) \frac{\partial}{\partial x_i} u$ für $\psi \in C^1(\mathbb{R})$, wobei $\|\psi'\|_\infty < \infty$ sei.

e) * $\frac{\partial}{\partial x_i}(H(u)u) = H(u) \frac{\partial}{\partial x_i} u$, wobei H die Heaviside–Funktion ist:

$$H(u) = \begin{cases} 1 & \text{für } u > 0, \\ 0 & \text{für } u \leq 0. \end{cases}$$

Aufgabe 3: (6 Punkte) Sei Ω ein beschränktes Gebiet in $\mathbb{R}^n$ und $1 \leq p < q \leq \infty$. Dann hat man

$$C^1(\bar{\Omega}) \underset{(\neq)}{\subset} W^{1,q}(\Omega) \underset{(\neq)}{\subset} W^{1,p}(\Omega) \underset{(\neq)}{\subset} L^p(\Omega),$$

nicht nur als Menge, sondern sogar als stetige Einbettung. Zeigen Sie dies.

(bitte wenden)

---
*unbewertete Zusatzaufgabe

Aufgabe 4: [*] Zeigen Sie, dass $C^1[-1,1] \cap C_0[-1,1] \subset W_0^{1,p}(-1,1)$ für alle $p \in [1,\infty)$.
Hinweis: Definieren Sie für $u \in C^1[-1,1] \cap C_0[-1,1]$ die Funktionen u_n durch

$$u_n(x) := \begin{cases} u\left(x\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) & \text{für } x \in \left(-\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1}, \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1}\right) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und glätten Sie diese Funktionen.

[*] unbewertete Zusatzaufgabe