Prof. Guido Sweers **WS 2011/2012**
Matthias Erven

Variationsrechnung
Übungsblatt 7

Diese Hausaufgaben werden am Mittwoch, den 30.11.2011, um 13:45 Uhr eingesammelt. Bitte werfen Sie Ihre Lösung in den Briefkasten im Keller des Mathematischen Instituts ein.

Aufgabe 1: * Wie würde man eine schwache Lösung definieren zum

a) Randwertproblem

$$\begin{cases} -\sum\limits_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} a_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_j} u(x) + \sum\limits_{j=1}^{n} b_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j} u(x) + c(x)\, u(x) = f(x) \text{ in } \Omega, \\ u(x) = 0 \text{ auf } \partial\Omega, \end{cases}$$

mit $a_{ij}, b_j \in C^1(\bar{\Omega})$, $c \in C(\bar{\Omega})$ und $f \in L^2(\Omega)$?

b) Randwertproblem

$$\begin{cases} -\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} u(x) \ + c(x)\, u(x) = f(x) \text{ in } \Omega, \\ u(x) = 0 \text{ auf } \partial\Omega, \end{cases}$$

mit $a_{ij} \in C^1(\bar{\Omega})$, $c \in C(\bar{\Omega})$ und $f \in L^2(\Omega)$?

Aufgabe 2: Wir wollen mit den Mitteln der Variationsrechnung versuchen, die optimale (=kleinste) Konstante $C_{Wirt} > 0$ zu finden, so dass die Ungleichung von Wirtinger gilt, dass also

$$\int_0^1 u(x)^2 \, dx \le C_{Wirt} \int_0^1 u'(x)^2 \, dx$$

für alle $u \in W^{1,2}(0,1)$ mit $u(0) = u(1)$ und $\int_0^1 u(x)\, dx = 0$ gilt.

a) Zeigen Sie, dass dieses Problem äquivalent dazu ist, C_{Wirt} im folgenden Minimierungsproblem zu bestimmen:

$$C_{Wirt}^{-1} = \inf_{u \in W^{1,2}_{per}(0,1)} \int_0^1 u'(x)^2 \, dx$$

mit den Nebenbedingungen

$$\int_0^1 u(x)^2 \, dx = 1 \text{ und } \int_0^1 u(x)\, dx = 0$$

und $W^{1,2}_{per}(0,1) := \left\{ u + c; u \in W^{1,2}_0(0,1) \text{ und } c \in \mathbb{R} \right\}$.

b) Wir beschränken uns darauf, das Minimum in $\mathcal{C} := \{u + c; u \in C^2[0,1] \cap C_0[0,1] \text{ und } c \in \mathbb{R}\}$ zu suchen. Berechnen Sie C_{Wirt}.

c) Was können wir für C_{Wirt} folgern?

---

*unbewertete Zusatzaufgabe

Aufgabe 3: * Für ein beschränktes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ definieren wir

$$\|u\|_\diamond := \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx.$$

a) Zeigen Sie, dass $\|.\|_\diamond$ eine Norm auf $W_0^{1,2}(\Omega)$ ist.

b) Zeigen Sie, dass diese Norm äquivalent zur $\|.\|_{W^{1,2}(\Omega)}$–Norm ist, dass es also ein $C > 0$ gibt, so dass

$$\frac{1}{C} \|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} \le \|u\|_\diamond \le C \|u\|_{W^{1,2}(\Omega)}$$

für alle $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ gilt.

Aufgabe 4: a) Zeigen Sie, dass es ein $C > 0$ gibt, so dass

$$\int_0^1 u'(x)^2 \, dx \le C \int_0^1 u''(x)^2 \, dx$$

gilt für $u \in C^2[0,1] \cap C_0[0,1]$.

b) Zeigen Sie, dass $\|\cdot\|_*$, definiert durch

$$\|u\|_* = \sqrt{\int_0^1 (u''(x))^2 \, dx}$$

auf $W^* = W^{2,2}(0,1) \cap W_0^{1,2}(0,1)$ äquivalent ist zu der Standardnorm für $W^{2,2}(0,1)$.
Hinweis: $C^2[0,1] \cap C_0[0,1]$ liegt dicht in W^*.

Aufgabe 5: * Zeigen Sie, dass $\|\cdot\|_*$, definiert durch

$$\|u\|_* = \sqrt{\int_{-1}^1 (u''(x))^2 \, dx}$$

auf $W^\clubsuit = \left\{ u \in W^{2,2}(-1,1) \, ; \int_{-1}^1 u(x)\, dx = 0 = \int_{-1}^1 x u(x) \, dx \right\}$ äquivalent ist zu der Standardnorm für $W^{2,2}(-1,1)$.

Aufgabe 6: * Es sei $(H, \langle\langle .,. \rangle\rangle)$ ein Hilbertraum, versehen mit der durch das Skalarprodukt induzierten Norm, und es seien $x, y \in H$.

a) Zeigen Sie die *Parallelogramm–Gleichung*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right).$$

b) Zeigen Sie

$$\langle\langle x, y \rangle\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right).$$

Aufgabe 7: * Zeigen Sie, dass eine schwache Lösung u von

$$\begin{cases} -\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_j} u(x)\right) + c(x) u(x) = f(x) & \text{in } \Omega, \\ \sum_{i,j=1}^n \nu_i a_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_j} u(x) = 0 & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases}$$

für die $u \in C^2(\bar{\Omega})$ gilt, das Randwertproblem auch im klassischen Sinne löst.

---

*unbewertete Zusatzaufgabe