Prof. Guido Sweers **WS 2011/2012**
Matthias Erven

Variationsrechnung
Übungsblatt 8

Diese Hausaufgaben werden am Mittwoch, den 7.12.2011, um 13:45 Uhr eingesammelt. Bitte werfen Sie Ihre Lösung in den Briefkasten im Keller des Mathematischen Instituts ein.

Aufgabe 1: (8 Punkte) Der Träger einer Funktion kann auf verschiedene Arten definiert werden: Für $u \in C(\Omega)$ definiert man

$$\operatorname{support}(u) := \overline{\{x \in \Omega; u(x) \neq 0\}}. \tag{1}$$

Für Lebesgue–integrierbare Funktionen, also insbesondere für Funktionen $u \in L^1(\Omega)$, verwendet man Definition 8.1.5 aus der Vorlesung.

a) Zeigen Sie, dass (1) für $u \in L^1(\Omega)$ nicht wohldefiniert ist, sondern abhängt vom gewählten Vertreter.

b) Zeigen Sie, dass Definition 8.1.5 für $u \in L^1(\Omega)$ hingegen funktioniert, da diese Definition nicht abhängt vom gewählten Vertreter.

c) Zeigen Sie, dass Definition in (1) mit Definition 8.1.5 übereinstimmt für $u \in C(\Omega)$.

Aufgabe 2: (6 Punkte) Definieren Sie einen stetigen linearen Fortsetzungsoperator $E_1 : C^1[0,1] \to C_b^1(\mathbb{R})$ und zeigen Sie, dass Ihr E_1 die gewünschten Eigenschaften hat.

Aufgabe 3: * Wir definieren $E_k : C_b^{k,\gamma}[0,\infty) \to C_b^{k,\gamma}(\mathbb{R})$ durch

$$(E_k u)(x) := \begin{cases} u(x) & \text{für } x \geq 0, \\ \sum_{i=1}^{k+1} c_i u(-\frac{1}{i}x) & \text{für } x < 0, \end{cases}$$

wobei die c_i die Lösung des folgenden Systems sind:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & \cdots & -\frac{1}{k+1} \\ 1 & \left(\frac{1}{2}\right)^2 & \left(\frac{1}{3}\right)^2 & \cdots & \left(\frac{1}{k+1}\right)^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ (-1)^k & \left(-\frac{1}{2}\right)^k & \left(-\frac{1}{3}\right)^k & \cdots & \left(\frac{1}{k+1}\right)^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \\ c_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Zeigen Sie, dass $E_k \in L\left(C^k[0,1]; C_b^k(\mathbb{R})\right)$ gilt, d.h. dass E_k wohldefiniert, linear und stetig ist.
Hinweis: Die Gleichung (2) findet man durch

$$\lim_{x \uparrow 0} \left(\frac{d}{dx}\right)^m (E_k u)(x) = \lim_{x \downarrow 0} \left(\frac{d}{dx}\right)^m u(x) \text{ für } m \in \{0, \ldots, k\}.$$

---

*unbewertete Zusatzaufgabe

Aufgabe 4: * Für $u \in C_b^1([0,\infty))$ definieren wir

$$(Eu)(x) := \begin{cases} u(x) & \text{für } x \geq 0, \\ (u(0) + xu'(0))\,\chi(x) & \text{für } x < 0, \end{cases}$$

wobei $\chi \in C^\infty(\mathbb{R})$ eine fest gewählte Funktion ist, für die $\chi|_{(-\infty,-1]} \equiv 0$, $\chi|_{[0,\infty)} \equiv 1$ und $0 \leq \chi(x) \leq 1$ für $-1 < x < 0$ gilt.

a) Zeigen Sie, dass E ein stetiger, linearer Fortsetzungsoperator $E : C_b^1([0,\infty)) \to C_b^1(\mathbb{R})$ ist.

b) Kann man auf die gleiche Art einen Fortsetzungsoperator $E : W^{1,p}(0,\infty) \to W^{1,p}(\mathbb{R})$ definieren?

Aufgabe 5: * Mit Hilfe von Lemma 8.2.5 kann man keine Fortsetzung $\tilde{E} : C_b^1([0,\infty)^2) \to C_b^1(\mathbb{R}^2)$ konstruieren, da der Rand von $[0,\infty)^2$ bei $(0,0)$ nicht C^1 ist. Allerdings ist diese Bedingung auch nicht immer notwendig, wenn man noch zusätzliche Randbedingungen hat. Konstruieren Sie eine Fortsetzung $\tilde{E} : C_b^1([0,\infty)^2) \cap C_0([0,\infty)^2) \to C_b^1(\mathbb{R}^2)$.

Aufgabe 6: (6 Punkte) Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^1$ und $1 < p < \infty$.

a) Zeigen Sie, dass für $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap C\left(\overline{\Omega}\right)$ gilt

$$u(x) = 0 \text{ für alle } x \in \partial\Omega.$$

b) Es sei $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C_0\left(\overline{\Omega}\right)$. Gilt dann $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$?

Aufgabe 7: * Zeigen Sie die Ungleichung von Young: Für $a, b > 0$ und $p, q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ gilt

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q.$$

*unbewertete Zusatzaufgabe