Prof. Guido Sweers
Matthias Erven **WS 2011/2012**

Variationsrechnung
Übungsblatt 9

Diese Hausaufgaben werden am Mittwoch, den 14.12.2011, um 13:45 Uhr eingesammelt. Bitte werfen Sie Ihre Lösung in den Briefkasten im Keller des Mathematischen Instituts ein.

Aufgabe 1: * Stetigkeit und Halbstetigkeit kann man auch mit Hilfe von Folgen definieren. Zum Beispiel sagt man, dass f unterhalbfolgenstetig in $x \in X$ ist, wenn für jede Folge $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X$ mit $\lim_{k\to\infty} x_k = x$ gilt $\liminf_{k\to\infty} f(x_k) \geq f(x)$. Zeigen Sie, dass „unterhalbstetig" und „unterhalbfolgenstetig" äquivalent sind.

Aufgabe 2: * Sei X ein metrischer Raum. Zeigen Sie:

a) Ist eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ stetig, so ist sie oberhalbstetig und unterhaltstetig.

b) Ist eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ oberhalbstetig und unterhaltstetig, so ist sie stetig.

Aufgabe 3: (8 Punkte) Kompaktheit wird für allgemeine topologische Räume mit Hilfe von Überdeckungen definiert. In normierten Räumen kann man auch Folgenkompaktheit definieren: Eine Teilmenge K eines normierten Raumes X heißt *folgenkompakt*, wenn jede Folge mit Elementen in K eine Teilfolge besitzt, die gegen ein Element aus K konvergiert. Zeigen Sie:

a) * Ist $K \subset X$ folgenkompakt, so ist K abgeschlossen und beschränkt.

b) Ist $K \subset X$ kompakt, so ist K folgenkompakt.

c) * Ist $K \subset X$ folgenkompakt, so ist K kompakt.

Aufgabe 4: * Zeigen Sie, dass eine kompakte lineare Funktion vollstetig ist.

Aufgabe 5: (12 Punkte) Für $\alpha \in \mathbb{R}$ sei $f_\alpha : B_1(0) \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiert durch $f_\alpha(x) := |x|^\alpha$.

a) Es sei $1 < p < n$. Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt $f_\alpha \in L^p(B_1(0))$?

b) Es sei $1 < p < n$. Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt $|\nabla f_\alpha| \in L^p(B_1(0))$?

c) Als Korollar der Gagliardo–Nirenberg–Sobolev–Ungleichung haben wir folgendes für $p < n$ erhalten: Wenn $q \leq \frac{np}{n-p}$, dann gilt $W^{1,p}(B_1(0)) \subset L^q(B_1(0))$. Zeigen Sie, dass diese Grenze für q optimal ist, indem Sie für $q > \frac{np}{n-p}$ ein α finden, so dass zwar $f_\alpha \in W^{1,p}(B_1(0))$, nicht aber $f_\alpha \in L^q(B_1(0))$ gilt.

---

*unbewertete Zusatzaufgabe