

Prof. Dr. Peter Littelmann
Dr. Deniz Kus

ÜBUNGEN ALGEBRAISCHE GRUPPEN UND LIE ALGEBREN, BLATT 1

Sommersemester 2014

(Abgabe in der Vorlesung 16.4.14)

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Zu beliebigen $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ gibt es ein Polynom $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ vom Grad $n - 1$ mit $f(j) = a_j$ für $j = 1, 2, \dots, n$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Die Morphismen $\phi : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ der Form $(x, y) \mapsto (x, y + f(x))$ mit einem Polynom $f \in \mathbb{C}[x]$ sind Isomorphismen.

Aufgabe 3 (8 Punkte)

Hier wollen wir folgendes zeigen: Die Gruppe der polynomialen Automorphismen (d.h. Isomorphismen auf sich selbst) des \mathbb{C}^2 wirkt n -fach transitiv auf \mathbb{C}^2 , und zwar für jedes $n > 0$. Wir verwenden dazu die beiden vorangehenden Aufgaben.

- i) Sind $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{C}$, so gibt es einen Automorphismus $\phi : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ mit $\phi((j, 0)) = (a_j, j), j = 1, 2, \dots, n$.
- ii) Sind $p_j = (a_j, b_j) \in \mathbb{C}^2 (j = 1, \dots, n)$ Punkte mit verschiedenen x -Koordinaten a_i , so gibt es einen Automorphismus $\phi : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ mit $\phi(p_j) = (a_j, j), j = 1, \dots, n$.
- iii) Die Automorphismengruppe des \mathbb{C}^2 ist n -fach transitiv für jedes $n \geq 1$.
- iv) Ist $E \subset \mathbb{C}^2$ eine endliche Teilmenge, so gibt es eine Untergruppe H von $Aut(\mathbb{C}^2)$ mit Fixpunktmenge $(\mathbb{C}^2)^H = E$.

(Eine Gruppe G operiert auf einer Menge X n -fach transitiv, falls es für je n verschiedene Punkte x_1, \dots, x_n und y_1, \dots, y_n ein Element $g \in G$ gibt, so dass $g.x_i = y_i$ für $1 \leq i \leq n$)

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Die Abbildung $\varphi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^2, t \mapsto (t^2, t^3)$ definiert einen bijektiven Morphismus auf

$$Y = \{(v_1, v_2) \in \mathbb{C}^2 \mid v_1^3 - v_2^2 = 0\}.$$

Aber φ^{-1} ist kein Morphismus.