Prof. Dr. Peter Littelmann
Dr. Deniz Kus

ÜBUNGEN ALGEBRAISCHE GRUPPEN UND LIE ALGEBREN, BLATT 2

Sommersemester 2014

(Abgabe in der Vorlesung 23.4.14)

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Wir bezeichnen mit $\Lambda^j(k^n)$ die j-te äussere Algebra.

i) Zeigen Sie: Für ein $g \in Gl_n(k)$ ist die Abbildung
$$\Lambda^j(g) : \Lambda^j(k^n) \to \Lambda^j(k^n), v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_n \mapsto g.v_1 \wedge g.v_2 \wedge \cdots \wedge g.v_n$$
ein linearer Isomorphismus.

ii) Gegeben seien $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 8 & 6 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $w = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Berechne $\Lambda^2(g)(v \wedge w)$.

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Zeigen Sie:
$$\Lambda^j(g)(e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_j}) = \sum_{1 \leq \ell_1 < \cdots < \ell_j \leq n} Minor^{i_1 < \cdots < i_j}_{\ell_1 < \cdots < \ell_j} e_{\ell_1} \wedge \cdots \wedge e_{\ell_j},$$
wobei $Minor^{i_1 < \cdots < i_j}_{\ell_1 < \cdots < \ell_j}$ die Determinante der Untermatrix von g ist bestehend aus den Spalten $i_1 < \cdots < i_j$ und Zeilen $\ell_1 < \cdots < \ell_j$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Jede Matrix $A \in M_n(k)$ mit $A^m = Id$ für ein $m \geq 1$ ist diagonalisierbar.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei $U \subseteq k^n$ ein d-dimensionaler affiner Unterraum. Zeigen Sie, dass U die Nullstellenmenge von $n - d$ linearen Polynomen ist und folglich eine algebraische Teilmenge.