Prof. Dr. Peter Littelmann
Dr. Deniz Kus

ÜBUNGEN ALGEBRAISCHE GRUPPEN UND LIE ALGEBREN, BLATT 3

Sommersemester 2014
(Abgabe in der Vorlesung 30.4.14)

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Zeige: Jede endliche Untergruppe $G \subset GL(\mathbb{C}^n)$ ist eine lineare algebraische Gruppe.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei G eine endliche Untergruppe von $GL(\mathbb{C}^n)$. Zeigen Sie: Es gibt eine hermitische Form $\langle .,. \rangle$ die G-invariant ist, d.h.

$$\langle gv, gw \rangle = \langle v, w \rangle, \ \forall v, w \in \mathbb{C}^n, g \in G.$$

Aufgabe 3 (8 Punkte)

Sei $G \subset GL(\mathbb{C}^n)$ eine Untergruppe. Eine Unterraum $U \subset \mathbb{C}^n$ heisst G-stabil falls $g(U) \subset U$ für alle $g \in G$. Ein G-stabiler Unterraum heisst irreduzibel bezüglich G, falls aus $U' \subset U$ G-stabil folgt $U' = 0$ oder $U' = U$. Man nennt einen G-stabilen Unterraum V vollständig reduzibel bezüglich G, falls es irreduzible G-stabile Unterräume $U_1, ..., U_s$ gibt mit $V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_s$. Zeigen Sie: Ein Unterraum $V \subset \mathbb{C}^n$ ist vollständig reduzibel bezüglich $G \Leftrightarrow$ zu jedem G-stabilen Unterraum $U \subseteq V$ gibt es einen G-stabilen Unterraum $W \subset V$, so dass $V = U \oplus W$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei $G \subset GL(\mathbb{C}^n)$ eine endliche Untergruppe. Zeige Sie: Ein Unterraum $V \subset \mathbb{C}^n$ ist vollständig reduzibel.