Prof. Dr. Peter Littelmann
Dr. Deniz Kus

ÜBUNGEN ALGEBRAISCHE GRUPPEN UND LIE ALGEBREN, BLATT 4

Sommersemester 2014

(Abgabe in der Vorlesung 7.5.14)

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Für ein Ideal $\mathcal{I} \subset k[x_1, \dots, x_n]$ sei $V(\mathcal{I}) = \{v \in k^n \mid f(v) = 0\}$ die Nullstellenmenge. Seien $\mathcal{I}_j$, $j \in \mathcal{J}$ Ideale in $k[x_1, \dots, x_n]$.

i) Zeige: Sind $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ zwei Ideale mit $\mathcal{A} \subseteq B$, dann gilt $V(\mathcal{A}) \supseteq V(\mathcal{B})$

ii) Zeige:

$$\bigcap_{j \in \mathcal{J}} V(\mathcal{I}_j) = V(\sum_{j \in \mathcal{J}} \mathcal{I}_j)$$

iii) Zeige: Sind $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ zwei Ideale, dann gilt

$$V(\mathcal{A}) \cup V(\mathcal{B}) = V(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) = V(\mathcal{A}\mathcal{B}).$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Wir sagen eine Teilmenge $X \subset k^n$ ist abgeschlossen, wenn gilt $X = V(\mathcal{A})$ für ein Ideal in $A \subset k[x_1, \dots, x_n]$. Zeige: Ein beliebiger Durchschnitt von abgeschlossenen Teilmengen ist abgeschlossen, eine endliche Vereinigung von abgeschlossenen Teilmengen ist wieder abgeschlossen.
Wir sagen eine Teilmenge $U \subset k^n$ ist offen, wenn gilt U ist das Komplement einer abgeschlossenen Menge. Zeige: Eine beliebige Vereinigung von offenen Teilmengen ist offen, ein endlicher Durchschnitt von offenen Teilmengen ist wieder offen.
Unter eine *Topologie* auf einer Menge M versteht man eine Kollektion $\sum$ von Teilmengen von M, genannt offene Mengen, die die Eigenschaft hat: Die beliebige Vereinigung von offenen Mengen ist offen, der endliche Schnitt von offenen Mengen ist offen, und sowohl die leere Menge als auch ganz M sind offen.
Zeigen Sie: Die oben definierten offenen Teilmengen bilden eine Topologie auf dem k^n. Diese Topologie wird *Zariski-Topologie* genannt.

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Sei $X \subset k^n$ eine affine Varietät. Wir definieren als die Zariski Topologie auf X die induzierte Topologie, d.h. die offenen respektive abgeschlossenen Teilmengen von X sind die Teilmengen, die man als Schnitt von X mit einer offenen (respektive abgeschlossenen) Teilmenge erhält.

i) Für $x \in X$ sei $\mathcal{M}_x \subset k[X]$ das maximale Ideal und $\pi : k[x_1, \ldots, x_n]$ die Projektion. Sei $\mathcal{I} \subset k[x_1, \ldots, x_n]$ ein Ideal. Zeige:

$$V(\mathcal{I}) \cap X = \{x \in X \mid \mathcal{M}_x \supseteq \pi(\mathcal{I})\}$$

ii) Folgere: Die Zariski-Topologie auf X is unabhängig von der Einbettung

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Auf den $n \times n$ Matrizen definieren wir eine Multiplikation durch $[A, B] := AB - BA$. Sei $\mathfrak{gl}(M_n(\mathbb{C}))$ die Menge der k-linearen Abbildungen von $M_n(\mathbb{C})$ nach $M_n(\mathbb{C})$. Ein Element $D \in \mathfrak{gl}(M_n(\mathbb{C}))$ heisst Derivation wenn gilt

$$D([A, B]) = [A, D(B)] + [D(A), B], \forall A, B \in M_n(\mathbb{C})$$

i) Sei $A \in M_n(\mathbb{C})$, und sei $ad_A : M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$ definiert durch $B \mapsto [A, B]$. Zeigen Sie, dass ad_A eine Derivation ist.

ii) Ist die Abbildung $ad : M_n(\mathbb{C}) \to Der(M_n(\mathbb{C}))$, $A \mapsto ad_A$ injektiv?