Prof. Dr. Peter Littelmann
Dr. Deniz Kus

ÜBUNGEN ALGEBRAISCHE GRUPPEN UND LIE ALGEBREN, BLATT 5

Sommersemester 2014

(Abgabe in der Vorlesung 14.5.14)

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei Z eine affine algebraische Varietät und sei $M \subseteq Z$ eine Teilmenge. Bezeichne mit $I_M = \{f \in k[Z] \mid f|_M \equiv 0\}$ und sei $\overline{M} = V(I_M)$.

i) Zeigen Sie: $\overline{M}$ ist die kleinste Zariski abgeschlossene Teilmenge von Z, die M enthält.
ii) Zeige:

$$\overline{M} = \bigcap_{M \subseteq X \subseteq Z, X \text{ abg.}} X$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei G eine (abstrakte) Gruppe, sei $\rho : G \to GL(V)$ eine irreduzible Darstellung. $\Psi \in GL(V)$ habe die Eigenschaft

$$\Psi(\rho(g)(v)) = \rho(g)(\Psi(v)).$$

Zeige: $\Psi = \lambda Id$, für ein $\lambda \in k$. (Beachte: k ist algebraisch abgeschlossen, also hat Ψ einen nicht-trivialen Eigenraum!)

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Seien G, H (abstrakte) Gruppen und sei

$$\rho : G \times H \to GL(U)$$

eine irreduzible Darstellung, so dass U als G-Darstellung und auch als H-Darstellung vollständig reduzibel ist.

i) Betrachte U nur als eine G-Darstellung. Zeige: Es gibt für G eine irreduzible Unterdarstellung $V \subseteq U$. Bezeichne mit $\rho_V : G \to GL(V)$ die zugehörige Abbildung. Zeige: Alle irreduziblen G-Unterdarstellungen von U sind isomorph zu V, insbesondere $U = \underbrace{V \oplus \cdots \oplus V}_{r}$ als G-Darstellung.

   (Beachte: Elemente aus G und H vertauschen!).
ii) Sei $Hom_G(V, U) = \{\phi \in Hom(V, U) \mid \phi(\rho_V(g)v) = \rho(g)(\phi(v))\}$.
   Zeigen Sie $\dim Hom_G(V, U) = r$.

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Sei $G = \{g_1, \dots, g_n\}$ eine endliche Gruppe. Die Gruppenalgebra $\mathbb{C}G$ ist ein Vektorraum mit Basis G, die Elemente in $\mathbb{C}G$ sind also Linearkombinationen der Form $\sum_j a_j g_j$ mit $a_j \in \mathbb{C}$. Ausserdem ist $\mathbb{C}G$ ein Ring mit Multiplikation

$$(\sum_j a_j g_j)(\sum_k b_k g_k) = \sum_{j,k} a_j b_k g_j g_k.$$

Sei $L(G)$ der Untervektorraum von $\mathbb{C}G$ der von $\{\hat{g} = g - g^{-1} \mid g \in G\}$ erzeugt wird.

i) Bestimmen Sie das Einselement in $\mathbb{C}G$.
ii) Zeige: G abelsch $\Longrightarrow L(G)$ abelsch.
iii) Zeige: $\dim_{\mathbb{C}} L(G) = \frac{1}{2}|\{g \in G \mid g \neq g^{-1}\}|$