Prof. Dr. Peter Littelmann
Dr. Deniz Kus

ÜBUNGEN ALGEBRAISCHE GRUPPEN UND LIE ALGEBREN, BLATT 6

Sommersemester 2014
(Abgabe in der Vorlesung 28.5.14)

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Seien G, H linear reduktive affine algebraische Gruppen und sei $k = \mathbb{C}$. Ansonsten benutzen wir die Notationen wie auf Blatt 5, Aufgabe 3, insbesondere sei $\rho : G \times H \longrightarrow GL(U)$ und $V \subseteq U$ ist eine irreduzible Unterdarstellung für G.

i) Zeigen Sie: Die Abbildung $\Psi : H \longrightarrow GL(Hom_G(V,U))$, $\Psi(h)(\phi) := \rho(1,h) \circ \phi$ definiert eine Darstellung.
ii) Zeige: Die Abbildung
$$\eta : V \otimes Hom_G(V,U) \longrightarrow U, v \otimes \phi \mapsto \phi(v)$$
ist ein Isomorphismus von $G \times H$ Darstellungen.
iii) Folgere: Jeder irreduzible $G \times H$ Darstellung ist von der Form $V \otimes W$, wobei V eine irreduzible G und W eine irreduzible H Darstellung ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei $\alpha = \epsilon_i - \epsilon_j$ und $t = diag(t_1, \ldots, t_n) \in T_n$ eine invertierbare Diagonalmatrix, $a\epsilon_i : T_n \to \mathbb{C}^*, a\epsilon_i(t) = t_i^a, a \in \mathbb{Z}$. Zeige:
$$tU_\alpha(z)t^{-1} = U_\alpha(t_i t_j^{-1} z) = U_\alpha(\alpha(t)z),$$
wobei $U_\alpha(z) = zE_{i,j} + E_n, z \in \mathbb{C}$ und $E_{i,j} = (e_{k,l})$, mit $e_{k,l} = 1$, falls $(k,l) = (i,j)$ und $e_{k,l} = 0$, sonst.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei $\mathcal{N}$ die Kategorie der natürlichen Zahlen mit Morphismen
$$Hom(i,j) = \begin{cases} \emptyset, & \text{falls } i > j \\ (i,j), & \text{sonst.} \end{cases}$$
Sei $\mathcal{V}$ die Kategorie der endlich dimensionalen Vektorräume mit Morphismen
$$Hom(V,W) = \begin{cases} \emptyset, & \text{falls } \dim V > \dim V \\ \{\varphi : V \longrightarrow W \mid \varphi \text{ injektiver Vektorraumhom.}\}, & \text{sonst.} \end{cases}$$
Zeigen Sie $\mathcal{N}$ und $\mathcal{V}$ sind wirklich Kategorien. Zeigen oder widerlegen Sie: Die Kategorien $\mathcal{N}$ und $\mathcal{V}$ sind äquivalent.

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie und $\{A_i, i \in I\}$ eine Menge von Objekten in der Kategorie. Wir nennen $(P, \{\mathrm{pr}_i \mid i \in I\})$ das Produkt der Objekte in $\{A_i, i \in I\}$, wobei $\mathrm{pr}_i : P \longrightarrow A_i$ ein Morphismus ist (genannt die Projektion), falls für jedes Objekt C und jede Familie von Morphismen f_i von C nach A_i es genau einen Morphismus f von C nach P gibt mit $f_i = \mathrm{pr}_i \circ f$. Zeigen Sie:

i) Das Produkt ist eindeutig bestimmt durch die universelle Eigenschaft bis auf Isomorphie.

ii) Welcher bekannten Definition entspricht das Produkt in der Kategorie der Mengen?