Prof. Dr. Peter Littelmann
Dr. Deniz Kus

ÜBUNGEN ALGEBRAISCHE GRUPPEN UND LIE ALGEBREN, BLATT 7

Sommersemester 2014
(Abgabe in der Vorlesung 4.6.14)

Aufgabe 1 (8 Punkte)

Sei $(X, \mathbb{C}[X])$ eine affine Varietät und für $f \in \mathbb{C}[X]$ sei
$$X_f = \{x \in X \mid f(x) \neq 0\}.$$

i) Analog zu der Art und Weise wie man $\mathbb{Q}$ als Paare von Elementen aus $\mathbb{Z}$ mit Kürzungsrelation definiert, definieren wir
$$\mathbb{C}[X]_f = \{h/f^m \mid h \in \mathbb{C}[X], m \geq 0\}/\sim,$$
wobei $h/f^m \sim h'/f^k$, wenn $hf^k = h'f^m$ und wir definieren als Addition und Multiplikation
$$h/f^m + h'/f^k = (hf^k + h'f^m)/f^{m+k}, (h/f^m)(h'/f^k) = hh'/f^{m+k}.$$
Zeige: Die Definition der Addition und Multiplikation ist unabhängig von der Wahl der Repräsentanten.

ii) Zeige: $\mathbb{C}[X]_f$ ist eine endlich erzeugte reduzierte Algebra (also der Koordinatenring einer affinen Varietät).

iii) Sei $X \subseteq \mathbb{C}^m$ eingebettet mit Verschwindungsideal $I(X)$, und sei
$$\widehat{X}_f = \{(y, z) \in \mathbb{C}^m \times \mathbb{C} \mid h(y) = 0 \forall h \in I(X); f(y)z - 1 = 0\}.$$
Zeige: Die Abbildung $(y, z) \mapsto y$ definiert eine Bijektion $\widehat{X}_f \to X_f$.

iv) Zeige: $\mathbb{C}[\widehat{X}_f] \cong \mathbb{C}[X]_f$, und durch die Bijektion oben wird $(X_f, \mathbb{C}[X]_f)$ eine affine Varietät.

v) Zeigen Sie damit: Die Gruppe $GL_n(\mathbb{C})$ ist eine affine Varietät und bestimmen Sie den Koordinatenring.

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Sei $O_n(\mathbb{R})$ die reelle orthogonale Gruppe und sei $SO_n(\mathbb{R})$ die spezielle reelle orthogonale Gruppe, d.h. $SO_n(\mathbb{R}) = \{g \in O_n(\mathbb{R}) \mid \det g = 1\}$. Bezeichne mit $\langle -, - \rangle$ das Standardskalarprodukt auf dem $\mathbb{R}^n$.

i) Sei e_1 der erste Einheitsvektor. Zeige: Ist $v \in \mathbb{R}^n$ mit $\langle v, v \rangle = 1$, so gibt es einen Weg $\Phi : [0, 1] \longrightarrow SO_n(\mathbb{R})$ mit $\Phi(0) = E_n$ und $\Phi(1)(v) = e_1$. (Man dreht v stetig auf e_1.)

ii) Zeige: Ist $g \in SO_n(\mathbb{R})$ beliebig, dann gibt es einen Weg $\varphi : [0, 1] \longrightarrow SO_n(\mathbb{R})$ mit $\varphi(0) = g$ und
$$\varphi(0) \in \{g \in SO_n(\mathbb{R}) \mid g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & h \end{pmatrix}, h \in SO_{n-1}(\mathbb{R})\}.$$

iii) Zeige per Induktion über n: $SO_n(\mathbb{R})$ ist wegzusammenhängend.
iv) Zeige: $O_n(\mathbb{R})$ ist nicht wegzusammenhängend und hat genau zwei Zusammenhangskomponenten.

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Sei $U_n(\mathbb{C}) = \{g \in GL_n(\mathbb{C}) \mid \overline{g}^t g = E_n\}$ die unitäre Gruppe mit Lie-Algebra die schiefhermiteschen Matrizen $\mathfrak{u}_n(\mathbb{C}) = \{A \in M_n(\mathbb{C}) \mid \overline{A}^t = -A\}$.

i) Zeige: Die Exponentialabbildung $exp : \mathfrak{u}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow U_n(\mathbb{C})$ ist surjektiv.
ii) Folgere: $U_n(\mathbb{C})$ ist wegzusammenhängend.