Prof. Dr. Peter Littelmann
Dr. Deniz Kus

ÜBUNGEN ALGEBRAISCHE GRUPPEN UND LIE ALGEBREN, BLATT 8

Sommersemester 2014

(Abgabe in der Vorlesung 11.6.14)

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Sei H die Heisenberg Gruppe

$$H = \{g \in Gl_n(\mathbb{R}) \mid g = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, a, b, c \in \mathbb{R}\}.$$

Berechnen Sie den Tangentialraum von H an der Einheitsmatrix (also die Lie algebra $LieG$). Berechnen Sie ebenfalls den Tangentialraum an der Einheitsmatrix von $SO_n(\mathbb{C}) = \{A \in O_n(\mathbb{C}) \mid det(A) = 1\}$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Berechne das Differential von

$$\Phi : Gl_n(\mathbb{C}) \longrightarrow Gl_n(\mathbb{C}), A \mapsto (A^{-1})^t$$

an der Einheitsmatrix.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Zeige:

i) Die Lie algebren $LieSl_2(\mathbb{C})$ und $LieSO_3(\mathbb{C})$ sind isomorph.
ii) Die Gruppen $SL_2(\mathbb{C})$ und $SO_3(\mathbb{C})$ sind nicht isomorph.

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Sei $\Phi : \mathbb{R} \longrightarrow Gl_2(\mathbb{C})$, $t \mapsto \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{iat} \end{pmatrix}$ wobei a eine beliebige (aber fest zu wählende) irrationale Zahl ist. Zeige:

$$\overline{\Phi(\mathbb{R})} = \{ \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{is} \end{pmatrix} \mid s, t \in \mathbb{R}\}$$