Prof. Dr. Peter Littelmann
Dr. Deniz Kus

ÜBUNGEN ALGEBRAISCHE GRUPPEN UND LIE ALGEBREN, BLATT 9

Sommersemester 2014
(Abgabe in der Vorlesung 25.6.14)

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Für die von den Matrizen

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

erzeugte Lie-Unteralgebra von $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{R})$ berechne man explizit $exp(t(X+Y))$ und $exp(tX)exp(tY)$ sowie $exp(tY)exp(tX)$ und die jeweiligen Differenzen. (Hinweis: Verwenden Sie sinh und cosh).

Aufgabe 2 (7 Punkte)

Seien $X, Y \in M_n(\mathbb{C})$ Matrizen mit $ad_X^2(Y) = ad_Y^2(X) = 0$, oder anders gesagt $[X, [X, Y]] = [Y, [Y, X]] = 0$. Zeigen oder widerlegen Sie:

$$log(e^X e^Y) = X + Y + \frac{1}{2}[X, Y]$$

$$exp(X + Y) = exp(X)exp(Y)exp(-\frac{1}{2}[X, Y])$$

Aufgabe 3 (7 Punkte)

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Behauptungen über die Heisenberg-Gruppe H (siehe Blatt 8)

i) Die Abbildung $exp : T_E(H) \longrightarrow H$ ist bijektiv mit $exp(A) = E + A + \frac{1}{2}A^2$ für alle $A \in T_E(H)$, und $log(h) = -\frac{3}{2} + 2h - \frac{1}{2}h^2$ für alle $h \in H$.

ii) Für alle $A, B \in T_E(H)$ gilt $exp(A)exp(B) = exp(A + B + \frac{1}{2}[A, B])$.