

Algebra 1 – Übungsblatt 1

(Abgabe: Mittwoch, 19. Oktober 2011 in der Vorlesung)

Aufgabe 1: Seien G und G' zwei Gruppen. Die Verknüpfungen seien mit \circ und \circ' bezeichnet, die neutralen Elemente mit e und e' .

Zeigen Sie: Ein Gruppenhomomorphismus $\varphi : G \rightarrow G'$ ist genau dann injektiv, wenn $\ker(\varphi) = \{e\}$.

Aufgabe 2: Zeigen Sie, dass die unitäre Gruppe

$$U_n(\mathbb{C}) = \{A \in M_n(\mathbb{C}) \mid AA^* = \mathbb{1}\}$$

und die orthogonale Gruppe

$$O_n(\mathbb{C}) = \{A \in M_n(\mathbb{C}) \mid AA^t = \mathbb{1}\}$$

Untergruppen der $GL_n(\mathbb{C})$ sind.

Aufgabe 3: Sei $\varphi : G \rightarrow G'$ ein Gruppenhomomorphismus und $H \subset G$, $H' \subset G'$ zwei Untergruppen.

Zeigen Sie:

- i) Das Bild $\varphi(H) = \{\varphi(h) \mid h \in H\} \subset G'$ ist eine Untergruppe.
- ii) Das Urbild $\varphi^{-1}(H') = \{g \in G \mid \varphi(g) \in H'\} \subset G$ ist eine Untergruppe.

Aufgabe 4: Sei G eine Gruppe, die nicht kommutativ ist.

Zeigen Sie: $|G| \geq 6$.

Nennen Sie ein Beispiel einer nicht-kommutativen Gruppe mit 6 Elementen.