Dr. G. Fourier
B. Niemann

Köln, 19. Oktober 2011

Algebra 1 – Übungsblatt 2

(Abgabe: Mittwoch, 26. Oktober 2011)

Aufgabe 1:

i) Zeigen Sie: Jede Untergruppe einer zyklischen Gruppe ist zyklisch.

ii) Sei G eine endlich erzeugte abelsche Gruppe und $\{g_1, \ldots, g_n\}$ ein System von Erzeugern, das minimal ist.
Zeigen Sie: Jede Untergrupe $H \subset G$ ist endlich erzeugt und es werden höchstens n Erzeuger gebraucht.
(Hinweis: Beweisen Sie die Aussage per Induktion. Verwenden Sie i) für den Induktionsanfang und bilden Sie dann geeignete Restklassengruppen.)

Aufgabe 2: Seien G und H zwei Gruppen sowie $\varphi : H \to \mathrm{Aut}(G)$ ein Homomorphismus. Wir definieren auf der Menge $P = G \times H$ durch

$$(g_1, h_1)(g_2, h_2) = (g_1\varphi(h_1)(g_2), h_1h_2)$$

eine Verknüpfung.

i) Zeigen Sie, dass P mit dieser Verknüpfung zu einer Gruppe wird.

ii) Zeigen Sie, dass die Menge $G \times \{e_H\}$ ein (zu G isomorpher) Normalteiler von P ist.

iii) Zeigen Sie, dass im Falle $\varphi(H) = \{\mathrm{Id}_G\}$ die Gruppe P zum direkten Produkt $G \times H$ isomorph ist.

Aufgabe 3:

i) Es sei $G \subset S_5$ die Untergruppe der symmetrischen Gruppe S_5, die von der Permutation (12345) erzeugt wird. Beweisen Sie, dass es außer dem trivialen Homomorphismus (also $\varphi(\sigma) = \mathrm{id}$ für alle $\sigma \in G$) keinen Gruppenhomomorphismus $\varphi : G \to S_4$ gibt.

ii) Konstruieren Sie einen Gruppenhomomorphismus $\varphi : S_3 \to S_2$, der nicht trivial ist. Beschreiben Sie Kern und Bild von φ und wenden Sie den Isomorphiesatz an.

Aufgabe 4: Sei G eine Gruppe und $H \subset G$ eine Untergruppe vom Index 2, also $|G/H| = 2$.

Zeigen Sie: H ist ein Normalteiler in G.