Dr. G. Fourier
B. Niemann

Köln, 26. Oktober 2011

Algebra 1 – Übungsblatt 3

(Abgabe: Mittwoch, 2. November 2011)

Aufgabe 1: Sei G eine Gruppe und $\mathrm{Int}(G)$ die Gruppe der inneren Automorphismen, d.h. Automorphismen der Form $\varphi_a : G \to G,\ g \mapsto aga^{-1}$ mit $a \in G$.

Zeigen Sie: $\mathrm{Inn}(G) \simeq G/Z(G)$

Aufgabe 2: Sei G eine endliche Gruppe.

Zeigen Sie: G ist nicht die Vereinigung der Konjugierten einer echten Untergruppe. D.h. für jede Untergruppe $H \subsetneqq G$ gilt:

$$G \neq \bigcup_{g \in G} gHg^{-1}$$

(Hinweis: Betrachten Sie eine geeignete Gruppenoperation auf der Menge der Untergruppen von G. Benutzen Sie dann die Bahnformel und zeigen Sie anschließend, dass $\left|\bigcup_{g\in G} gHg^{-1}\right| < |G|$*.)*

Aufgabe 3: Sei S_n die symmetrische Gruppe in n Elementen. Weiter sei A_n die alternierende Gruppe. Ein Produkt zweier disjunkter Transpositionen nennt man Doppeltransposition.

Zeigen Sie:

i) Für $n \geq 5$ lässt sich jeder Dreizykel (a, b, c) als Produkt zweier Doppeltranspositionen in A_n schreiben.

ii) Für $n \geq 5$ wird A_n von den Doppeltranspositionen erzeugt.

iii) In S_n sind je zwei k-Zykel zueinander konjugiert.

iv) Für $n \geq 5$ sind in A_n je zwei Dreizykel und zwei Doppeltranspositionen zueinander konjugiert.

Aufgabe 4: Sei G eine endliche Gruppe.

Zeigen Sie: G ist isomorph zu einer Untergruppe einer symmetrischen Gruppe.