Dr. G. Fourier
B. Niemann

Köln, 2. November 2011

Algebra 1 – Übungsblatt 4

(Abgabe: Mittwoch, 9. November 2011)

Aufgabe 1: Zeigen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $|S_n| = n!$.

Aufgabe 2: Bestimmen Sie alle p-Sylowuntergruppen von $\mathbb{Z}_{2500}$, S_3 und S_4.
(Tipp: Diedergruppe D_4.)

Aufgabe 3: Sei R ein unitärer Ring.
Zeigen Sie: Es gibt genau einen Ringhomomorphismus $\varphi : \mathbb{Z} \to R$.

Aufgabe 4: Sei G eine Gruppe und $N \subset G$ ein Normalteiler.
Zeigen Sie: G ist genau dann auflösbar, wenn N und G/N auflösbar sind.

Aufgabe 5: Untersuchen Sie, welche der folgenden Mengen Ideale sind.

i) $M_1 := \{a \in R \mid a^n = 0 \text{ für ein } n \in \mathbb{N}\}$, für einen kommutativen Ring R,

ii) $M_2 := \{A \in M_n(\mathbb{C}) \mid \det(A) = 0\} \subset M_n(\mathbb{C})$,

iii) $M_3 := \{A \in M_n(C) \mid \det(A) \neq 0\} \subset M_n(\mathbb{C})$,

iv) $M_4 := \{Xp(X) \mid p(X) \in \mathbb{R}[X]\} \subseteq \mathbb{R}[X]$,

v) $M_5 := \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{C}$.