Dr. G. Fourier
B. Niemann

Köln, 9. November 2011

Algebra 1 – Übungsblatt 5

(Abgabe: Mittwoch, 16. November 2011)

Aufgabe 1: Sei G eine Gruppe und $Z(G)$ das Zentrum von G.

i) Zeigen Sie: Wenn $G/Z(G)$ zyklisch ist, so ist G abelsch.

ii) Seien p, q zwei Primzahlen mit $p \neq q$ und G eine Gruppe der Ordnung pq. Zeigen Sie: Wenn $Z(G) \neq \{e\}$, so ist G zyklisch.

Aufgabe 2: Sei R ein kommutativer Integritätsring mit 1. Weiter habe R die Charakteristik p, d.h. p ist die kleinste natürliche Zahl, so dass $p1 = \underbrace{1 + \cdots 1}_{p\text{-mal}} = 0$. Falls für alle natürlichen Zahlen n gilt $n1 \neq 0$, so sagen wir, R hat Charakteristik 0. Zeigen Sie:

i) Wenn $\mathrm{Char}(R) = p \neq 0$, so ist p eine Primzahl.

ii) Wenn $\mathrm{Char}(R) = p \neq 0$, so ist die Abbildung

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{Fro}: & R & \to & R \\ & a & \mapsto & a^p \end{array}$$

ein Homomorphismus, der sog. *Frobenius-Homomorphismus.*

Aufgabe 3: Sei R ein kommutativer Ring. Dann ist

$$\mathrm{Nil}(R) := \{a \in R \mid \exists n \in \mathbb{N} : a^n = 0\}$$

das sog. Nilradikal (vgl. Aufgabe 5 v), Blatt 4).

i) Zeigen Sie: $\mathrm{Nil}\,(R/\mathrm{Nil}(R)) = (0)$.

ii) Zeigen Sie: Wenn $a \in \mathrm{Nil}(R)$, dann ist $1 - a$ eine Einheit von R.

iii) Bestimmen Sie das Nilradikal von $\mathbb{Z}/20\mathbb{Z}$.

iv) Sei $M_2(R)$ der Ring der 2×2-Matrizen mit Einträgen in R. Geben Sie zwei nilpotente Elemente in $M_2(R)$ an, so dass die Summe der beiden Elemente nicht nilpotent ist.

Aufgabe 4: Sei K ein endlicher Körper und $\varphi : K^n \to K$ eine Abbildung.
Zeigen Sie: Es existiert ein Polynom $f \in K[X_1, \ldots, X_n]$ mit $\varphi(x) = f(x)$ für alle $x \in K^n$.