Dr. G. Fourier
B. Niemann

Köln, 16. November 2011

Algebra 1 – Übungsblatt 6

(Abgabe: Mittwoch, 23. November 2011)

Aufgabe 1:

i) Seien G eine endliche Gruppe und H eine p-Sylowgruppe von G.
Zeigen Sie: H ist ein Normalteiler von G genau dann, wenn G eine einzige p-Sylowuntergruppe hat.

ii) Zeigen Sie: Eine Gruppe der Ordnung 40 kann nicht einfach sein.

iii) Zeigen Sie: Eine Gruppe der Ordnung p^2q, wobei p und q Primzahlen sind, ist nicht einfach.

Aufgabe 2: Sei R ein Integritätsring und $r \in R\backslash\{0\}$ ein Element, das keine Einheit ist.
Zeigen Sie: Das Element r ist genau dann irreduzibel, wenn das Ideal (r) ist ein echtes Hauptideal von R (d.h. $(r) \neq R$) ist und für alle $r' \in R$ mit $(r) \subseteq (r') \neq R$ gilt: $(r) = (r')$.

Aufgabe 3: Seien R ein kommutativer Ring und $S, B \subset R$ zwei Teilmengen. Wir betrachten den Restklassenring nach dem von B erzeugten Ideal $R/(B)$ und dessen Lokalisierung nach dem Bild von S, also den Ring $(\mathrm{can}_q S)^{-1}(R/(B))$. Wir betrachten weiter die Lokalisierung $S^{-1}R$ und deren Restklassenring nach dem vom Bild von B darin erzeugten Ideal $(S^{-1}R)/(\mathrm{can}_1 B)$.

Konstruieren Sie einen kanonischen Isomorphismus

$$\varphi : (\mathrm{can}_q S)^{-1}(R/(B)) \xrightarrow{\sim} (S^{-1}R)/(\mathrm{can}_1 B)$$

zwischen diesen Ringen und zeigen Sie, dass er und seine Umkehrung jeweils die einzigen Ringhomomorphismen zwischen den besagten Ringen sind, die verträglich sind mit der kanonischen Abbildung von R in unsere beiden Ringe.

(Hinweis: Beide Seiten teilen eine universelle Eigenschaft.)

Aufgabe 4: Sei k ein Körper und $k[X]$ der Polynomring in einer Variablen.
Zeigen Sie:

i) Die Einheiten in $k[X]$ sind die Polynome $p(X) \neq 0$ von Grad 0.

ii) Alle Polynome vom Grad 1 sind irreduzibel in $k[X]$.

iii) Ist $P \in k[X]$ irreduzibel und $\mathrm{grad}\, P > 1$, so hat P keine Nullstelle in k.

iv) Ist $P \in k[X]$ vom Grad ≤ 3 und hat P keine Nullstelle in k, so ist P irreduzibel in $k[X]$.

v) Ist k algebraisch abgeschlossen, so sind die irreduziblen Polynome in $k[X]$ genau die Polynome vom Grad 1.