Dr. G. Fourier
B. Niemann

Köln, 23. November 2011

Algebra 1 – Übungsblatt 7

(Abgabe: Mittwoch, 30. November 2011)

Aufgabe 1: Sei k ein Körper, $n \geq 1$ und $R = M_n(k)$ der Ring der $(n \times n)$-Matrizen mit Einträgen in k und $GL_n(k)$ die invertierbaren $(n \times n)$-Matrizen mit Einträgen in k.
Zeigen Sie:

i) $M_n(k)$ besitzt keine Ideale außer (0) und $M_n(k)$ selbst.

ii) $A \in M_n(k)$ Nullteiler $\iff A \notin GL_n(k)$. Ist die Aussage für einen beliebigen Ring wahr?

Aufgabe 2: Betrachte den Ring $\mathbb{Z}[i]$. Weiter sei $\delta : \mathbb{Z}[i] \to \mathbb{N}_0$, $x + yi \mapsto x^2 + y^2$.
Zeigen Sie:

i) Für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}[i]$ gilt $\delta(z_1 z_2) = \delta(z_1)\delta(z_2)$.

ii) $z \in \mathbb{Z}[i]^\times \Leftrightarrow \delta(z) = 1$ und $\mathbb{Z}[i]^\times = \{\pm 1, \pm i\}$.

iii) 2 ist reduzibel in $\mathbb{Z}[i]$.

iv) Primzahlen $p \in \mathbb{Z}$ bleiben entweder Primzahlen in $\mathbb{Z}[i]$ oder lassen sich zerlegen in Produkte $p = \pm q\overline{q}$ von konjugierten Primelementen $q, \overline{q} \in \mathbb{Z}[i]$. Umgekehrt teilt jedes Primelement $q \in \mathbb{Z}[i]$ eine eindeutig bestimmte Primzahl $p \in \mathbb{Z}$.

Aufgabe 3: Zeigen Sie, dass die folgenden Polynome irreduzibel sind.

i) $X^4 + 3X^3 + X^2 - 2X + 1 \in \mathbb{Q}[X]$

ii) $2X^4 + 200X^3 + 2000X^2 + 20000X + 20 \in \mathbb{Q}[X]$

Aufgabe 4: Sei R ein Ring und $I \subset R, I \neq R$ ein Ideal. Dann heißt I *maximales Ideal*, falls für alle Ideale $J \subseteq R$ mit $I \subseteq J$ gilt: $J = I$ oder $J = R$.

i) Definieren Sie eine bijektive Entsprechung zwischen maximalen Idealen von $\mathbb{R}[X]$ und Punkten in der oberen Halbebene von $\mathbb{C}$.

ii) Beweisen Sie: Der Ring $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[X]/(X^2 + X + 1)$ ist ein Körper, während der Ring $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})[X]/(X^2 + X + 1)$ kein Körper ist.