Dr. G. Fourier
B. Niemann

Köln, 30. November 2011

Algebra 1 – Übungsblatt 8

(Abgabe: Mittwoch, 7. Dezember 2011)

Alle, die eine Klausurzulassung aus einem früheren Semester haben, müssen einen Nachweis bei B. Niemann vorlegen. (Für Studenten, die eine Zulassung aus dem letzten Jahr haben, reicht ein Hinweis per Email.)

Aufgabe 1: Sei R ein Ring. Ein Ideal $\mathfrak{p} \subset R$ heißt *Primideal* (oder *prim*), wenn $\mathfrak{p} \neq R$ und wenn aus $ab \in \mathfrak{p}$ $(a, b \in R)$ folgt, dass $a \in \mathfrak{p}$ oder $b \in \mathfrak{p}$.

i) Sei R ein Ring.
Zeigen Sie: Ein Ideal $\mathfrak{p} \subset R$ ist genau dann ein Primideal, wenn $R/\mathfrak{p}$ ein Integritätsbereich ist.

ii) Sei R ein Hauptidealring. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass ein Element $p \in R$ genau dann irreduzibel ist, wenn es ein Primelement ist.
Zeigen Sie: Das ist äquivalent dazu, dass (p) ein maximales Ideal in R ist.

Aufgabe 2:

i) Bestimmen Sie den Grad der Körpererweiterungen $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ und $\mathbb{Q}(i, \sqrt[3]{2})$.

ii) Zeigen Sie: $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$ und $\mathbb{Q}(i, \sqrt[3]{2}) = \mathbb{Q}(i\sqrt[3]{2})$.

Aufgabe 3: Sei K ein Körper und $K(X)$ der Körper der rationalen Funktionen mit Koeffizienten in K. Sei $f = \frac{X^3}{X^2+1} \in K(X)$.

i) Zeigen Sie: X ist algebraisch über $K(f)$.

ii) Zeigen Sie: Die Körpererweiterung $K(f) \subset K(X)$ ist algebraisch.

iii) Berechnen Sie den Grad der Körpererweiterung aus ii).

Aufgabe 4: Sei $f = X^3 - X + 1 \in \mathbb{Q}[X]$ und a eine Nullstelle von f.

i) Zeigen Sie: f ist irreduzibel über $\mathbb{Q}$.

ii) Bestimmen Sie das Inverse von $1 - 2a + 3a^2 \in \mathbb{Q}(a)$.

iii) Bestimmen Sie das Minimalpolynom über $\mathbb{Q}$ von $b = 1 + a - 2a^2$.