Dr. G. Fourier
B. Niemann

Köln, 7. Dezember 2011

Algebra 1 – Übungsblatt 9

(Abgabe: Mittwoch, 14. Dezember 2011)

Aufgabe 1:

i) Sei $f = a_0 + a_1 X + \ldots + a_n X^n \in \mathbb{Z}[X]$ ein Polynom vom Grad n und sei $\frac{p}{q}$ eine rationale Nullstelle von f ($p, q \in \mathbb{Z}$ teilerfremd, $q \neq 0$). Dann ist p ein Teiler von a_0 und q ein Teiler von a_n.

ii) Bestimmen Sie die rationalen Nullstellen des Polynoms

$$P(X) = 3X^4 + 4X^3 - 12X^2 + 4X - 15.$$

iii) Zeigen Sie: $X^3 - 2 \in \mathbb{Q}[X]$ hat keine rationale Nullstelle.

iv) Zeigen Sie: $X^3 - 2 \in \mathbb{Q}[X]$ ist das Minimalpolynom von $\sqrt[3]{2}$ über $\mathbb{Q}$.

Aufgabe 2: Sei L/K eine algebraische Körpererweiterung und R ein Ring mit $K \subset R \subset L$.
Zeigen Sie: R ist ein Teilkörper von L.

Aufgabe 3: Es sei $\alpha \in \mathbb{C}$ und $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = 2$.
Zeigen Sie: Es gibt ein $m \in \mathbb{Z}$ mit $\mathbb{Q}(\alpha) = \mathbb{Q}(\sqrt{m})$.

Aufgabe 4: Sei K die Menge der konstruierbaren Zahlen. Zeigen Sie, dass für $a \in \mathbb{C}^*$ folgende Aussagen äquivalent sind:

i) a liegt in K.

ii) $|a|$ und $\frac{a}{|a|}$ liegen in K.

iii) $\mathrm{Re}(a)$ und $\mathrm{Im}(a)$ liegen in K.