

Algebra 1 – Übungsblatt 10
(Abgabe: Mittwoch, 21. Dezember 2011)

Aufgabe 1: Bestimmen Sie den Zerfällungskörper L des jeweiligen Polynoms $p_i \in \mathbb{Q}[X]$ und berechnen Sie seinen Grad.

i) $p_1(X) = (X^2 + 1)(X^2 + 4)$,

ii) $p_2(X) = (X^2 + 1)(X^2 + 3)$,

iii) $p_3(X) = (X^4 + 2)$,

iv) $p_4(X) = X^4 + 4X^2 + 1$.

Aufgabe 2: Berechnen Sie das Minimalpolynom von $\sqrt[3]{3} - \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$ über \mathbb{Q} .

Aufgabe 3: Sei der Körper $\mathbb{F}_p(T)$ gegeben.

Zeigen Sie: $X^p - T$ ist irreduzibel in $\mathbb{F}_p(T)[X]$ (insbesondere hat T keine p -te Wurzel in $\mathbb{F}_p(T)$) und nennen Sie ein Beispiel einer nicht-separablen Körpererweiterung.

Aufgabe 4: Sei K ein Körper und $P \in K[X]$ ein irreduzibles Polynom.

Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind.

i) Das Polynom P hat mehrfache Nullstellen in seinem Zerfällungskörper.

ii) Die formale Ableitung P' von P ist das Nullpolynom.

iii) Es gilt $\text{char } K = p > 0$ und es gibt $Q \in K[X]$ mit $P(X) = Q(X^p)$.