

## Algebra 1 – Übungsblatt 11

(Abgabe: Mittwoch, 11. Januar 2012)

**Aufgabe 1:** Seien  $K \subset L \subset M$  algebraische Körpererweiterungen.

Zeigen Sie:

$$K \subset L \text{ und } L \subset M \text{ sind separabel} \iff K \subset M \text{ ist separabel.}$$

Gilt die analoge Aussage auch für normale Erweiterungen?

**Aufgabe 2:** Zeigen Sie, dass  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(i, \sqrt[4]{2})$  eine Galois-Erweiterung ist. Bestimmen Sie deren Galoisgruppe und Zwischenkörper.

**Aufgabe 3:** Bestimmen Sie das Minimalpolynom von  $\alpha := \sqrt{3} + \sqrt{2}$  über  $\mathbb{Q}$ .

**Aufgabe 4:** Sei  $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  eine Nullstelle von  $X^3 - 3$  und sei  $L$  der Zerfällungskörper von  $X^3 - 3$  über  $\mathbb{Q}$ .

- i) Ist  $X^3 - 3$  irreduzibel in  $\mathbb{Q}[X]$ ?
- ii) Ist  $\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}$  normal? Ist  $L/K$  eine Galoiserweiterung?
- iii) Zeigen Sie:  $X^3 - 1$  zerfällt über  $L$  in Linearfaktoren.
- iv) Sei  $\mathbb{Q} \subset M \subset L$  der Zerfällungskörper von  $X^3 - 1$ . Zeigen Sie:  $[M : \mathbb{Q}] = 2$ .
- v) Zeigen Sie:  $[L : M] = 3$ .
- vi) Bestimmen Sie  $\text{Gal}(L/\mathbb{Q})$ .