Dr. G. Fourier
B. Niemann

Köln, 11. Januar 2012

# Algebra 1 – Übungsblatt 12

(Abgabe: Mittwoch, 18. Januar 2012)

**Aufgabe 1:** Sei $\zeta = e^{\frac{2i\pi}{13}}$ und sei $L = \mathbb{Q}(\zeta)$. Bestimmen Sie explizit den Zwischenkörper vom Grad 3 über $\mathbb{Q}$.

**Aufgabe 2:** Sei $P(X)$ das Polynom $X^3 + X^2 - 2X - 1 \in \mathbb{Q}[X]$.

i) Zeigen Sie: $P(X)$ ist irreduzibel.

ii) Berechnen Sie die Diskriminante $\Delta$ von $P(X)$.

iii) Folgern Sie aus $\sqrt{\Delta} \in \mathbb{Q}$, dass die Galoisgruppe von $P(X)$ von der Ordnung 3 ist.

**Aufgabe 3:**

i) Zeigen Sie, dass der einzige Automorphismus von $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ die Identität ist.

ii) Zeigen Sie, dass jedes irreduzible Polynom $f \in \mathbb{Q}[X]$ höchstens eine Nullstelle in $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ besitzt. Somit ist $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ nicht normal.

**Aufgabe 4:** Zeigen Sie: Für die in der Vorlesung definierte Eulersche $\varphi$-Funktion gilt die Identität

$$n = \sum_{d|n} \varphi(d).$$