Dr. G. Fourier
B. Niemann

Köln, 18. Januar 2012

Algebra 1 – Übungsblatt 13

(Abgabe: Mittwoch, 25. Januar 2012)

Aufgabe 1: Es sei M/K eine Körpererweiterung und $c \in \mathbb{N}$, so dass $[L : K] \leq c$ für alle Zwischenkörper $K \subset L \subset M$ gilt.
Zeigen Sie: $[M : K]$ ist endlich.

Aufgabe 2: Sei R ein endlicher Ring.

i) Zeigen Sie: Ein Element $r \in R$ ist entweder ein Nullteiler oder eine Einheit.

ii) Wie viele Nullteiler haben die folgenden Ringe jeweils?

$$R_1 = \mathbb{Z}_{900} \quad R_2 = \mathbb{Z}_{30} \times \mathbb{Z}_{30}, \quad R_3 = \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{75}, \quad R_4 = \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_{25}.$$

(Hinweis: Eulers φ-Funktion.)

Betrachte die Abbildung $M : \mathbb{Z} \to R_4$, $z \mapsto (M_4(z), M_9(z), M_{25}(z))$, wobei $M_i(z) = z \bmod i$ und $u = (\overline{1}, \overline{8}, \overline{22}) \in R_4$.

iii) Ist das Element u eine Einheit?

iv) Gibt es ein $z \in \mathbb{Z}$, so dass $z + M^{-1}(\{u\})$ ein Ideal von $\mathbb{Z}$ wird?

Aufgabe 3: Es sei R ein Integritätsbereich $a \in R^\times$, $b \in R$ und $\varphi : R[X] \to R[Y]$ der Homomorphismus, der durch $\varphi(X) = aY + b$ definiert ist.

Zeigen Sie: Für jedes $f(X) \in \mathbb{R}[X]$ gilt:

$$f(X) \text{ ist irreduzibel in } R[X| \Longleftrightarrow f(aY + b) \text{ ist irreduzibel in } R[Y].$$

Aufgabe 4: Sei ζ_{10} die zehnte Einheitswurzel $e^{\frac{2\pi i}{10}}$.

i) Faktorisieren Sie $X^{10} - 1$ in $\mathbb{Q}[X]$ und bestimmen Sie das Minimalpolynom von ζ_{10} über $\mathbb{Q}$.

ii) Zeigen Sie: $\mathbb{Q}(\zeta_{10}) = \mathbb{Q}[\zeta_{10}]$.

iii) Für welche $n \in N$ gilt $\mathbb{Q}[\zeta_{10}^n] = \mathbb{Q}[\zeta_{10}]$?

iv) Geben Sie einen echten Zwischenkörper der Körpererweiterung $\mathbb{Q}(\zeta_{10}) \supset \mathbb{Q}$ an.