EINFÜHRUNG IN DER PARTIELLEN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

2015

11. April 2015

GEORGE MARINESCU

Inhaltsverzeichnis

1. Einführung

1.1. Notationen und erste Definitionen.

Definition 1.1. Eine partielle Differentialgleichung (PDG) ist eine Gleichung, die eine Funktion von mehreren Variablen und partielle Ableitungen dieser Funktion nach mindestens zwei Variablen enthält. Enthält die Gleichung nur partielle Ableitungen nach einer Variablen, so handelt es sich um eine gewöhnliche Differentialgleichung, in der die übrigen Variablen nur als Parameter auftreten.

Notationen (siehe Analysis II):

- Vektoren in $\mathbb{R}^n$: $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ usw.
- Ein Multi-index ist ein Vektor $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$. Setze
$$|\alpha| := \alpha_1 + \ldots + \alpha_n \ \text{(Ordnung von } \alpha)$$
$$\alpha! := \alpha_1! \ldots \alpha_n! \ \ (\alpha \text{ Fakultät}), \quad x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}$$
- Bezeichne $\partial_i f = \partial_{x_i} f = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}$, $\partial_i^\mu f := \dfrac{\partial^\mu f}{\partial x_i^\mu}$ und für $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$,
$$\partial^\alpha f := \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_n^{\alpha_n} f = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}\,.$$
- Der Gradient-Operator ist $\operatorname{grad} = \partial = (\partial_1, \ldots, \partial_n)$.
- Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine Funktion $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ heißt *k-mal stetig differenzierbar*, wenn alle partiellen Ableitungen $\partial^\alpha f$, $|\alpha| \leqslant k$, bis zur Ordnung k von f existieren und stetig sind. Wir bezeichnen mit $\mathcal{C}^k(\Omega)$ den Raum der k-mal stetig differenzierbaren Abbildungen von Ω.
Eine Funktion $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ heißt *unendlich oft differenzierbar* oder *glatt*, wenn für alle $k \in \mathbb{N}$ alle partiellen Ableitungen $\partial^\alpha f$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ existieren und stetig sind. Wir bezeichnen mit $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ der Raum der unendlich oft differenzierbaren Abbildungen von U nach $\mathbb{R}^m$.

Taylorformel mit Lagrange-Restglied: Sei $f \in \mathcal{C}^{k+1}(\Omega, \mathbb{R})$, und seien $a, x \in \Omega$ mit $[a, x] \subset \Omega$. Dann existiert $\xi \in [a, x]$ mit
$$f(x) = \sum_{|\alpha| \leqslant k} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(a)(x-a)^\alpha + \sum_{|\alpha| = k+1} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(\xi)(x-a)^\alpha\,.$$

1.2. Beispiele.

Wir beschreiben nun, wie kommt man in der Physik zur wichtigen partiellen Differentialgleichungen.

(i) ***Kontinuitätsgleichung***. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ offen. Betrachte ein Massenfeld der Dichte $\rho : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, wobei die Massenteilchen sich mit der Geschwindigkeit $v : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ bewegen. Dabei ist $\rho(x, t)$ bzw. $v(x, t)$ die Massendichte bzw. Geschwindigkeit am Ort $x \in \Omega$ und Zeit $t \in \mathbb{R}$ und v wird als zeitabhäntikes Vektorfeld betrachtet. Wir nehmen an, dass ρ und v der Klasse C^1 sind.

Das Massenfeld kann zum Beispiel eine Flußigkeit oder ein Gas sein.

Massenerhaltungsgesetz: Für jede offene Teilmenge $G \subset \Omega$ mit C^1-Rand ist die Änderung der Masse in G gleich der über den Rand ∂G nach G einfließende Masse. Die Masse in G ist zur Zeit t ist

$$M_G(t) := \int_G \rho(x,t)dx$$

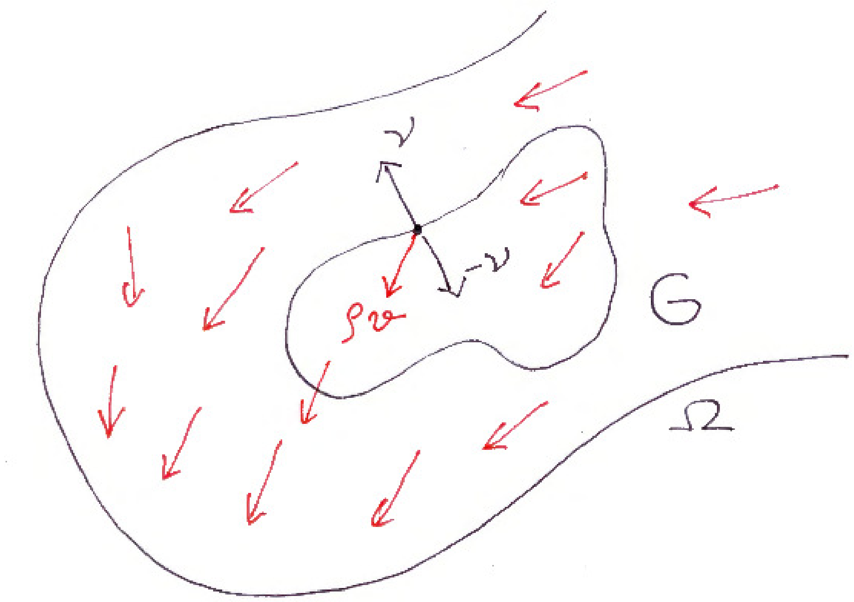
und deren Änderung ist durch die Ableitung nach der Zeit t gegeben:

$$\frac{dM_G}{dt} = \frac{d}{dt}\int_G \rho(x,t)dx = \int_G \frac{\partial \rho}{\partial t}(x,t)dx.$$

Der nach G einfließende Masse ist

$$\int_{\partial G} \langle \rho v, -\nu \rangle ds = -\int_{\partial G} \langle \rho v, \nu \rangle ds$$

wobei ν das äußere Einheitsnormalfeld zu G ist und ds das Flächenelement des Randes ∂G ist.



Wegen dem Divergenzsatz von Gauss gilt

$$\int_{\partial G} \langle \rho v, \nu \rangle ds = \int_G \mathrm{div}_x(\rho u)dx,$$

wobei

$$\mathrm{div}_x(v) = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial v_i}{\partial x_i}$$

die *Divergenz des Vektorfeldes* $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ in der Variablen x ist.

Es gilt also für alle $G \subset \Omega$ mit C^1-Rand

$$\int_G \frac{\partial \rho}{\partial t} dx = -\int_{\partial G} \langle \rho v, \nu \rangle ds = \int_G \operatorname{div}_x(\rho u) dx$$

also

$$\int_G \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}_x(\rho v) \right) dx = 0.$$

Da der Integrand stetig ist, folgt die *Kontinuitätsgleichung*:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}_x(\rho v) = 0 \quad \text{ in } \Omega \times \mathbb{R}.$$

Mit $\operatorname{div}_x(\rho v) = \langle \operatorname{grad}_x \rho, v \rangle + \rho \operatorname{div}_x(v)$ impliziert das

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \langle \operatorname{grad}_x \rho, v \rangle + \rho \operatorname{div}(v) = 0 \quad \text{ in } \Omega \times \mathbb{R},$$

äquivalent

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}(x,t) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial \rho}{\partial x_j}(x,t) v_j(x,t) + \rho(x,t) \operatorname{div}_{\mathrm{x}}(v)(x,t) = 0 \quad \text{ in } \Omega \times \mathbb{R}.$$

Ist v gegeben, so ist das eine PDG erster Ordnung in ρ (die Ableitungen erster Ordnung $\partial_t \rho$, $\partial_{x_j} \rho$ treten auf). Man nennt diese Differentialgleichung eine ***Transportgleichung***.

(ii) ***Laplace-Gleichung***. Eine Strömung heißt *inkompressibel* falls die Dichte ρ ein erstes Integral von v ist, äquivalent, ρ ist entlang jeder Integralkurve von v konstant. Daraus folgt

$$\langle \operatorname{grad}_x f, v \rangle = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

(siehe Vorlesung „Gewöhnliche Differentialgleichungen"). Damit folgt $\rho \operatorname{div}_x(v) = 0$ und somit $\operatorname{div}_x(v) = 0$, da $\rho \neq 0$.

Nehmen wir an, dass v *stationär* (zeitunabhänging) und *wirbelfrei* (das heißt $\operatorname{rot}(v) = 0$) ist. Dann ist v auf jede sternförmige Teilmenge $U \subset \Omega$ ein Gradientenfeld, das heißt es existiert ein Potential $u \in C^2(U)$ mit $\operatorname{grad} u = v$. Dann gilt $\operatorname{div}(\operatorname{grad} u) = 0$. Aber

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}$$

für jedes $f \in C^2(U)$. Der Operator

$$\Delta = \sum_{j=1}^n \partial_j^2 = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$$

heißt *Laplace-Operator* in $\mathbb{R}^n$.

Fazit: Das Potential $u \in C^2(U)$ einer stationären, inkompressiblen und wirbelfreien Strömung erfüllt die ***Laplace-Gleichung***

$$\Delta u = 0 \tag{1.1}$$

Die Lösungen dieser Gleichungen heißen *harmonische Funktionen*.

Sei $f \in C(\Omega)$ gegeben. Die Gleichung

$$\Delta u = f$$

mit der unbekannten Funktion $u \in C^2(\Omega)$ heißt ***Poisson-Gleichung***.

Die Bedeutung der Laplace-Gleichung umfasst viele Teilbereiche der Physik, der Geometrie und der Funktionentheorie:

- Elektrostatik: Das elektrische Potential im ladungsfreien Raum erfüllt die Laplace-Gleichung.
- Hydromechanik: Das Potential einer stationären, inkompressiblen, wirbelfreien Strömung erfüllt die Laplace-Gleichung.
- Die Verallgemeinerung des Laplace-Operators auf Riemannsche Mannigfaltigkeiten spielt eine wichtige Rolle in der Geometrie (z.B. durch Hodge-Theorie).
- Funktionentheorie: Holomorphe Funktionen und deren Real- und Imaginärteil sind harmonisch.

Wegen der physikaltischen Interpretation heißt (1.1) auch *Potential-Gleichung*. Andere wichtige Gleichungen in der Fluidmechanik sind die *Navier-Stokes-Gleichung* und die *Euler-Gleichung*.

(iii) ***Wärmeleitungsgleichung***. Die Wärmeleitungsgleichung beschreibt den Zusammenhang zwischen der zeitlichen Änderung und der räumlichen Änderung der Temperatur an einem Ort in einem Körper.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Gesucht wird $u : \overline{\Omega} \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $u = u(x,t)$, mit

$$\partial_t u - \Delta_x u = \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} = 0\,.$$

Dabei ist $u(x,t)$ die Temperatur des Körpers Ω am Ort x und Zeit t.

(iv) ***Wellengleichung***. Sie beschreibt die Ausbreitung von Wellen. Betrachten wir ein homogenes, isotropes Medium. Bei Abwesenheit von Dämpfung, Senken und Quellen wird die Schwingung $u : \overline{\Omega} \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $u = u(x,t)$, durch die d'Alembertsche Wellengleichung beschrieben:

$$\partial_t^2 u - \Delta_x u = \frac{\partial^2 u}{\partial^2 t} - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} = 0\,.$$

Diese Gleichung beschreibt die Ausbreitung von elektromagnetischen Wellen, Schallwellen, Gravitationswellen usw.

Für Beziehungen der PDG mit der Physik siehe

$\boxed{\text{The Feynman lectures in Physics}}$ or $\boxed{\text{Gerthsen Physik}}$

Herleitung der Gleichungen in Gerthsen: 4.2.2 Die Wellengleichung, 7.4.7 Wellengleichung und Telegraphengleichung, 5.4.2 Die Gesetze der Wärmeleitung, 6.1.3 Spannung und Potential (Herleitung der Poisson-Gleichung).

1.3. **Differentialoperatoren.** Betrachte die Abbildung

$$P(x,\partial) : C^k(\Omega) \to C(\Omega), \quad P(x,\partial)u = \sum_{|\alpha|\le k} a_\alpha(x)\partial^\alpha u,$$

wobei $a_\alpha \in C(\Omega)$.

Eine solche Abbildung heißt *linearer Differentialoperator von Ordnung* k. Das Polynom in ξ,

$$\sigma(P)(x,\xi) =: P(x,\xi) = \sum_{|\alpha|\le k} a_\alpha(x)\xi^\alpha$$

heit *Symbol des Operators* $P(x,\partial)$. Die Komponente vom höchsten Grad

$$\sigma_0(P)(x,\xi) =:= P_k(x,\xi) := \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x)\xi^\alpha$$

heit *Hauptsymbol von* $P(x,\partial)$.
Beispiele:

$$\Delta = \sum_{j=1}^n \partial_j^2 \qquad \Rightarrow \qquad \sigma(\Delta) = \sigma_0(\Delta) = \sum_{j=1}^n \xi_j^2 = \|\xi\|^2$$

$$\sigma(\partial_t - \Delta_x) = \eta - \sum_{j=1}^n \xi_j^2 = \eta - \|\xi\|^2 \qquad \Rightarrow \qquad \sigma_0(\partial_t - \Delta_x) = -\|\xi\|^2$$

Definition 1.2. Sei $P(x,\partial)$ ein linearer Differentialoperator und $f \in C(\Omega)$. Die Gleichung

$$P(x,\partial)u = f, \tag{1.2}$$

heißt *lineare partielle PDG von Ordnung* k. Falls $f \equiv 0$, so handelt es sich um eine *homogene* Gleichung, sonst von einer *inhomogenen* Gleichung.

Eine Funktion $u \in C^k(\Omega)$ heißt *(globale) Lösung der Gleichung* (1.2).

Wie in der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen (siehe z. B. den Satz von Cauchy-Picard-Lindelöf) spielt die lokale Lösbarkeit eine wichtige Rolle.

Definition 1.3. Der Operator $P(x,\partial)$ heißt *lokal lösbar* wenn

$$\forall f \in C^\infty(\Omega)\ \forall x_0 \in \Omega\ \exists U \ni x_0 \text{ offen } \exists u \in C^k(U) : \quad P(x,\partial)u = f \quad \text{auf } U.$$

Ist $n = 1$, so ist (1.2) eine lineare GDG vom Ordnung k,

$$\sum_{j=1}^{k} a_j(x) u^{(j)}(x) = f(x).$$

Wir wissen, dass solche GDG globale (also auch lokale) Lösungen haben. Für $n > 1$ ist die Lage komplizierter.

Problem: Falls

$$a_\alpha \in C^\infty \quad \text{und} \quad \sum_{|\alpha|=k} |a_\alpha(x)| \neq 0 \text{ auf } \Omega,$$

ist $P(x, \partial)$ lokal lösbar?

Sind a_α und f sind analytisch, so besagt der Satz von Cauchy-Kowalewskaja, dass die Aussage richtig ist. Für beliebige glatte Koeffizienten a_α ist die Antwort aber negativ. Das zeigt ein Gegenbeispiel von Hans Lewy: Es gibt $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$, so dass

$$\partial_1 u + i\partial_2 u + 2i(x_1 + ix_2)\partial_3 u = f$$

auf keiner offenen Teilmenge von $\mathbb{R}^3$ eine Lösung besitzt.

Eine große Klasse von Operatoren, die lokal lösbar sind, besteht aus Operatoren mit konstanten Koeffizienten a_α.

14.04.2015

2. PDG erster Ordnung. Das Cauchy-Problem

2.1. Die lineare PDG erster Ordnung

Sei $a \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ ein Vektorfeld und $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$.
Die lineare (inhomogene) PDG 1. Ordnung ist

(2.1.1) $\sum_{j=1}^{n} a_j(x)\, \partial_j u = f$, kurz $\langle a, \operatorname{grad} u \rangle = f$, in $\mathbb{R}^n$

Die homogene Gleichung erhält man für $f \equiv 0$:

(2.1.2) $\sum_{j=1}^{n} a_j(x)\, \partial_j u = 0$ in $\mathbb{R}^n$.

Für die Lösung benutzt man Begriffe und Methoden aus der gewöhnlichen DGl.

(1) Zu einem Vektorfeld $a: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ wird ein System $x'(t) = a(x(t))$ assoziiert. Die Lösungen $\varphi: I \to \mathbb{R}^n$ heißen Integralkurven des Vektorfeldes a.

(2) Eine Funktion $U: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt erstes Integral des Vektorfeldes, falls U nicht-konstant ist und konstant entlang der Integralkurven von a ist (d.h. $U(\varphi(t)) \equiv$ konst für φ Lösung von $x' = a(x)$).

(3) Sei $x_0 \in \mathbb{R}^n$ mit $a(x_0) \neq 0$. Dann gibt es eine Umgb Ω von x_0 und $(n-1)$ unabhängige erste Integrale $U_1, \dots, U_{n-1}: \Omega \to \mathbb{R}$ (d.h. die Jacobi-Determinante der Abbildung $(U_1, \dots, U_{n-1}): \Omega \to \mathbb{R}^{n-1}$ verschwindet nicht auf Ω).

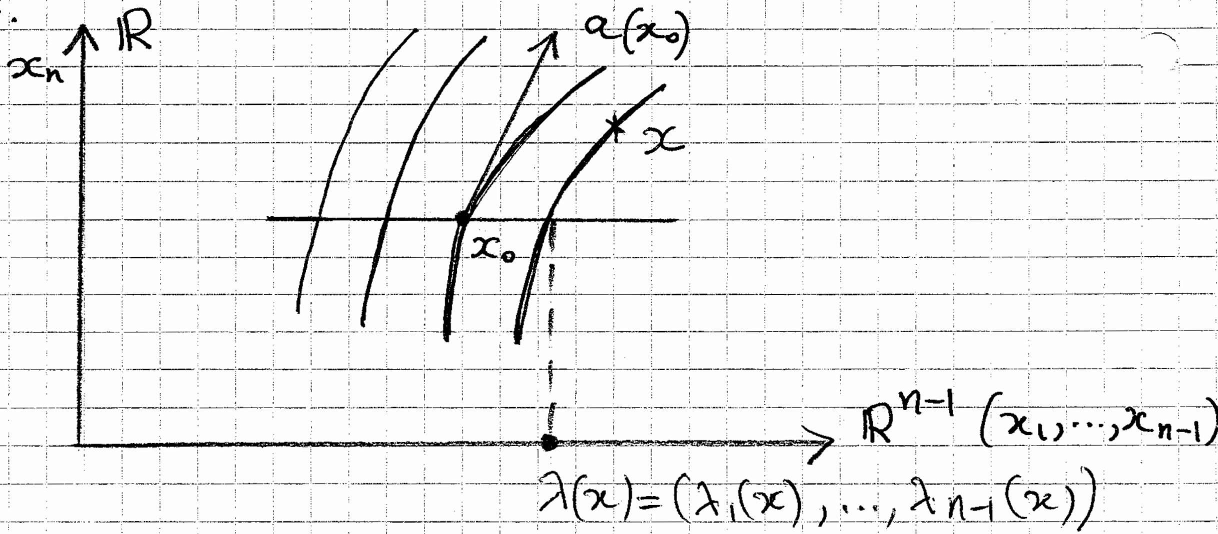
(4) Sei $U: \Omega \to \mathbb{R}$ ein weiteres erstes Integral. Dann existiert $F \in \mathcal{C}^1(V, \mathbb{R})$, wobei V eine Umgb von $(U_1(x_0), \dots, U_{n-1}(x_0))$ ist, so dass in einer Umgb von

x_0 gilt $U(x) = F(U_1(x), \dots, U_{n-1}(x))$.
(Dies besagt, das jedes erstes Integral U von $U_1, \dots, U_{n-1}$ funktional abhängt; ein unabhängiges System $U_1, \dots, U_{n-1}$ spielt die Rolle eines Fundamentalsystems in der Theorie der linearen GDGl).

(5) U ist erstes Integral von $a \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \Longleftrightarrow \langle a, \operatorname{grad} U \rangle = 0$ in $\mathbb{R}^n$.

Idee des Beweises von (3) & (4): siehe Satz 6.1.11. aus der Vorlesung GDGl, WS 14/15.

OBdA $a_n(x_0) \neq 0$. Man betrachtet die Integralkurven durch den Punkten $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, a_n)$. Mit Hilfe des Umkehrsatzes zeigt man, dass diese Int-Kurven eine ganze Umgb von x_0 ausfüllen, d.h. es gibt eine Umgb $\Omega_0 \ni x_0$ so dass für jedes $x \in \Omega_0$ existierten $\lambda_1 = \lambda_1(x), \dots, \lambda_{n-1} = \lambda_{n-1}(x)$ mit der Eigenschaft, dass x auf die Int-Kurve durch $(\lambda_1(x), \dots, \lambda_{n-1}(x), a_n)$ liegt.



Die gesuchten ersten Integrale sind $U_j : \Omega_0 \to \mathbb{R}$
$U_j(x) := \lambda_j(x)$.

Ist $U : \Omega_0 \to \mathbb{R}$ ein weiteres erstes Integral,

so ist U konstant entlang der Integralkurven, und das impliziert $U(x) = U(\lambda_1(x), \dots, \lambda_{n-1}(x), a_n(x_0))$
$= F(U_1(x), \dots, U_{n-1}(x))$, wobei $F(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}) :=$
$U(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, a_n(x_0))$.

Fassen wir die obigen Aussagen (1)-(5) zusammen:

<u>2.1.1. Satz</u> Sei $a \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ ein Vektorfeld, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, mit $a(x_0) \neq 0$. Seien $U_1, \dots, U_{n-1} : \Omega \to \mathbb{R}$ $(n-1)$ unabhängige erste Integrale in einer Umgb Ω von x_0. Ist $u : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Lösung der homogenen Gl. (2.1.2), so existiert eine Umgb Ω_0 von x_0 und eine Funktion $F : V \to \mathbb{R}$ in einer Umgb V von $(U_1(x_0), \dots, U_{n-1}(x_0))$ in $\mathbb{R}^{n-1}$ so dass

$$u(x) = F(U_1(x), \dots, U_{n-1}(x)), \quad x \in \Omega_0. \tag{2.1.3}$$

<u>Beweis</u> $\langle a, \operatorname{grad} u \rangle = 0$ in $\Omega \Leftrightarrow u$ erstes Integral von a. ∎

Dies rechtfertigt die Methode der Charakteristiken: Der Gleichung (2.1.2) assoziieren wir <u>das charakteristische System</u>:

$$x'(t) = a(x(t)) \Leftrightarrow x_j'(t) = a_j(x(t)), \ 1 \le j \le n,$$

wir finden $(n-1)$ unabhängige erste Integrale $U_1, \dots, U_{n-1}$ und dann ist die allgemeine Lösung von (2.1.2) gegeben durch (2.1.3).

<u>Beispiel</u> (i) Betrachte das einfachste Beispiel

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = 0, \quad u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$$

Man sieht die Lösung mit bloßen Augen: Die Gl besagt, dass u von der Variable x_1 nicht abhängt.

also $u(x) = U(0, x_2, \dots, x_n) := F(x_2, \dots, x_n)$.

Dies folgt auch mit der Charakteristikenmethode: Das char. System ist $x_1'(t) = 1,\ x_2'(t) = \dots = x_n'(t) = 0$ $\quad (a = (1, 0, \dots, 0))$

$\rightsquigarrow x_1(t) = t + c_1,\ x_2(t) = c_2, \dots, x_n(t) = c_n$

$\rightsquigarrow U_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ U_j(x) = x_j,\ 2 \le j \le n$ sind erste Integrale.

(ii) $(z^2 - y^2)\dfrac{\partial u}{\partial x} + z\dfrac{\partial u}{\partial y} - y\dfrac{\partial u}{\partial z} = 0$

Das charak. System ist

$$\frac{dx}{dt} = z^2 - y^2,\quad \frac{dy}{dt} = z,\quad \frac{dz}{dt} = -y$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{dx}{z^2 - y^2} = \frac{dy}{z} = \frac{dz}{-y} \quad (= dt)$$

Wir benutzen Eigenschaften der Proportionen:

$\dfrac{dy}{z} = \dfrac{dz}{-y} \rightsquigarrow y\,dy + z\,dz = 0 \rightsquigarrow d(y^2 + z^2) = 0$

also ist $U_1(x, y, z) = y^2 + z^2$ ein erstes Integral.

$\dfrac{dx}{z^2 - y^2} = \dfrac{z\,dy}{z^2} = \dfrac{y\,dz}{-y^2} = \dfrac{z\,dy + y\,dz}{z^2 - y^2} \rightsquigarrow dx = z\,dy + y\,dz$

$= d(yz)$, $d(x - yz) = 0$ also ist $U_2(x, y, z) = x - yz$ ein erstes Integral. Man überprüft leicht, dass U_1, U_2 unabhängig sind, auf $\mathbb{R}^3 \setminus \{y = z = 0\}$

Die Lösungen der ursprünglichen Gleichung sind der Form

$$u(x, y, z) = F(y^2 + z^2, x - yz)$$

Probe: $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial F}{\partial x}(\dots) \cdot 0 + \dfrac{\partial F}{\partial y}(\dots) \cdot 1$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial F}{\partial x} \cdot 2y + \dfrac{\partial F}{\partial x}(-z)$

$\dfrac{\partial u}{\partial z} = \dfrac{\partial F}{\partial x}(+2z) + \dfrac{\partial F}{\partial y}(-y)$ also

$$(z^2 - y^2)\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial x} 2yz + \frac{\partial F}{\partial x}(-z^2) + \frac{\partial F}{\partial x}(-2yz) + \frac{\partial F}{\partial y}(-y^2) = 0$$

Wir illustrieren die Charakteristikenmethode:

2.1.2 Satz Sei $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Betrachte die homogene lineare PDG erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten:

$$(2.1.4) \qquad \sum_{j=1}^{n} a_j \frac{\partial u}{\partial x_j} = 0$$

Wähle eine ONB $v_1, \dots, v_{n-1}$ der Hyperebene orthogonal zu a. Ist u eine Lösung von (2.1.3) so existiert $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^{n-1})$ mit $u(x) = F(\langle v_1, x\rangle, \dots, \langle v_{n-1}, x\rangle)$.

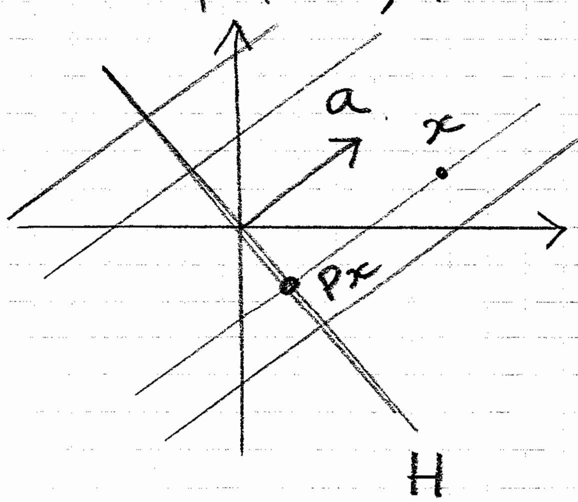
Beweis Das charak. System ist

$$\frac{dx_j}{dt} = a_j, \ 1 \le j \le n \ \rightsquigarrow \ x_j(t) = a_j t + b_j, \ 1 \le j \le n$$

Die Integralkurven sind Geraden parallel zu a und orthogonal zur Hyperebene $H = \{v \in \mathbb{R}^n : \langle v, a\rangle = 0\}$. Wähle eine ONB $v_1, \dots, v_{n-1}$ von H. Die Fkten $U_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $U_k(x) = \langle x, v_k\rangle$ sind erste Integrale des Vektorfelds a:

Für eine Lsg $x(t) = a \cdot t + b$ $(b \in \mathbb{R}^n)$, gilt $U_k(x(t))$ $= \langle at + b, v_k\rangle = \langle a, v_k\rangle t + \langle b, v_k\rangle = \langle b, v_k\rangle$ (konstant).

Sei $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ein erstes Integral, $x \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt $u(x) = u(Px)$, wobei Px die orthog. Projektion von x auf H ist, $Px = \langle x, v_1\rangle v_1 + \dots + \langle x, v_{n-1}\rangle v_{n-1}$.



Die Einschränkung $u|_H$ kann mit Hilfe von $F : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$,

$$F(y_1, \dots, y_{n-1}) := u(y_1 v_1 + \dots + y_{n-1} v_{n-1})$$

beschrieben werden. Dann gilt

$$u(x) = u(\langle x, v_1\rangle v_1 + \dots + \langle x, v_{n-1}\rangle v_{n-1})$$
$$= F(\langle x, v_1\rangle, \dots, \langle x, v_{n-1}\rangle). \quad \blacksquare$$

2.1.4 Korollar Ist $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^{n+1})$, $u = u(x,t)$, eine Lsg der homogenen Transportgleichung mit konstanten Koeffizienten

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + \sum_{j=1}^{n} b_j \frac{\partial u}{\partial x_j}(x,t) = 0 \quad , \quad b \in \mathbb{R}^n$$

so existiert $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$ mit $u(x,t) = f(x-bt)$.

Beweis Wende 2.1.3 für $a = (b,1) \in \mathbb{R}^{n+1}$ und $v_j = (e_j, -b_j)$, $1 \le j \le n$, wobei e_j die kanonische Basis von $\mathbb{R}^n$ ist. ∎

Wir beobachten:

(i) Die Lösung der Gl. (2.1.3) ist eindeutig bestimmt durch die Einschränkung $u|_H =: g$, d.h. das Problem $\langle \operatorname{grad} u, a \rangle = 0$, $u|_H = g$ hat eine eindeutige Lsg für jedes vorgegebene $g \in \mathcal{C}^1(H)$.

(ii) Der Beweis kann leicht modifiziert werden und liefert dasselbe Ergebnis wie in (i) für eine Hyperebene H mit $a \notin H$.

Dies führt zur folgenden Aufgabe. Sei $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ eine Hyperfläche der Klasse $\mathcal{C}^1$ (d.h. eine Untermfg der Dimension $n-1$). Das Cauchy-Problem (oder Anfangswertproblem) besteht darin, eine Lösung von (2.1.1), die auf Γ mit einer gegebenen Funktion $g \in \mathcal{C}^1(\Gamma)$ übereinstimmt:

$$(2.1.5) \qquad \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_j(x)\partial_j u = 0 & \text{auf } \mathbb{R}^n \\ u|_\Gamma = g & \text{auf } \Gamma. \end{cases}$$

Eine Hyperfläche in $\mathbb{R}^n$ ist eine Teilmenge $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$, die die folgenden äquivalenten Eigenschaften erfüllt:

(a) $\forall p \in \Gamma \; \exists U$ offen in $\mathbb{R}^n$, $p \in U \; \exists f \in \mathcal{C}^\infty(U)$:
$\operatorname{grad} f \neq 0$ auf U & $\Gamma \cap U = f^{-1}(0)$

(b) $\forall p \in \Gamma \; \exists U$ offen in $\mathbb{R}^n$, $p \in U \; \exists V$ offen in $\mathbb{R}^{n-1}$
$\exists \varphi \in \mathcal{C}^\infty(V, \mathbb{R}^n)$: rang $J_\varphi = n-1$ auf V &
$\varphi(V) = U \cap \Gamma$

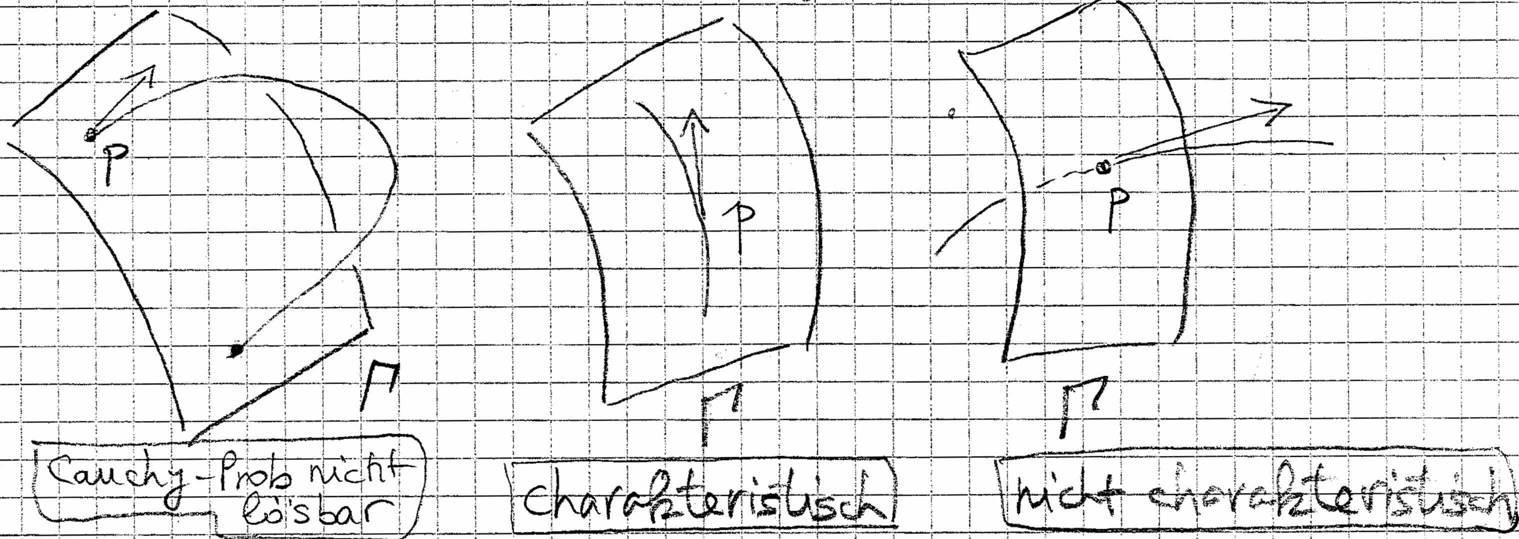
Der Tangentialraum $T_p\Gamma$ an Γ in p ist eine Hyperebene (Untervektorraum von Dimension $(n-1)$ in $\mathbb{R}^n$):

$$T_p\Gamma = \{v \in \mathbb{R}^n : df(p) \cdot v = 0\} = \{d\varphi(q) \cdot u : u \in \mathbb{R}^{n-1}, \varphi(q) = p\}$$

Das Cauchy-Problem (2.1.5) hat nicht immer eine Lösung: Der Wert von u ist auf jeder Charakteristik konstant. Wenn die Charakteristik die Anfangshyperfläche Γ mehrmals schneidet und die Werte der Anfangsfunktion g dort verschieden sind, so hat das Cauchy-Problem in keinem Gebiet, das diese Charakteristik enthält, eine Lösung.
Die Lage ist gravierend, wenn die Charakteristik in der Anfangshyperfläche liegt.
Um das zu verhindern, fordern wir folgendes.

<u>2.1.5 Definition</u> Ein Punkt $p \in \Gamma$ der Anfangshyperfläche ist <u>nicht charakteristisch</u> für die Gleichung (2.1.1) falls $a(p) \notin T_p\Gamma$, d.h. $a(p)$ nicht tangential zu Γ ist.
Diese Bedingung impliziert, dass die Charakteristik, die durch p verläuft,

transversal zur Anfangshyperfläche Γ ist.



Man kann dann zeigen, dass die Charakteristik trifft Γ nur in einem Punkt in einer genügend kleinen Umgebung von p.

2.1.6 Satz Sei $a \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ ein Vektorfelder, Γ eine Hyperfläche und $p \in \Gamma$ ein nicht charakteristischer Punkt von a. Dann gibt es eine Umgb Ω von p so dass für alle $g \in \mathcal{C}^1(\Gamma)$ das Cauchy-Problem (2.1.5) genau eine Lösung hat.

Idee: Es gibt eine Umgb Ω so dass für jedes $x \in \Omega$, die Charakteristik durch x genau in einem Punkt $\lambda(x) \in \Gamma$ die Hyperfläche Γ trifft. Die Lösung ist $u(x) = g(\lambda(x))$.