Einführung in die partiellen Differentialgleichungen – Sommer 2015
Prof. Dr. George Marinescu / Dr. Frank Lapp
Serie 10 mit Musterlösungen

Aufgabe 1 **4 Punkte**

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und $\partial\Omega$ C^1. Sei $\nu : \partial\Omega \to \mathbb{R}^n$ das äußere Einheitsnormalenvektorfeld und $u \in C(\partial\Omega)$.

a) Zeigen Sie, dass

$$u\delta_{\partial\Omega} : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}, \qquad \langle u\delta_{\partial\Omega}, \varphi\rangle = \int_{\partial\Omega} u\varphi ds \quad \text{und}$$

$$\frac{\partial}{\partial\nu}\left(u\delta_{\partial\Omega}\right) : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}, \qquad \left\langle \frac{\partial}{\partial\nu}\left(u\delta_{\partial\Omega}\right), \varphi \right\rangle = -\int_{\partial\Omega} u\frac{\partial\varphi}{\partial\nu} ds$$

in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ sind.

b) Sei

$$E(x) = \begin{cases} -\frac{1}{(n-2)\kappa_{n-1}} \frac{1}{\|x\|^{n-2}}, & n \geq 3 \\ \frac{1}{2\pi}\log\|x\|, & n = 2, \end{cases}.$$

Zeigen Sie das

$$\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\left(u\delta_{\partial\Omega}\right) * E\right)(x) = -\int_{\partial\Omega} u(y)\frac{\partial}{\partial\nu_y}E(x-y)ds(y) \quad \text{in } \mathcal{D}'(\Omega\backslash\partial\Omega).$$

Hinweis: Studieren Sie den Beweis von Satz 4.1.2.

Lösung:

Zu a): Wir benutzen Satz 3.1.4:

$$|\langle u\delta_{\partial\Omega}, \varphi\rangle| \leq \int_{\partial\Omega} |u\varphi| ds \leq \operatorname{vol}(\partial\Omega) \sup_{x\in\partial\Omega}|u(x)| \sup_{x\in\mathbb{R}^n}|\varphi(x)|$$

$$\left|\left\langle \frac{\partial}{u\delta_{\partial\Omega}}, \varphi \right\rangle\right| = \int_{\partial\Omega} |u| \left|\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right| ds \leq \operatorname{vol}(\partial\Omega) \sup_{x\in\partial\Omega}|u(x)| \max_{i=1,\dots,n} \sup_{x\in\mathbb{R}^n}|\partial_i\varphi(x)|$$

Zu b):

$$\left\langle \left(\frac{\partial}{\partial\nu}(u\delta_{\partial\Omega})\right) * E, \varphi \right\rangle = \left\langle E(y), \left\langle \frac{\partial}{\partial\nu_x}(u\delta_{\partial\Omega})(x), \psi(x,y)\varphi(x+y) \right\rangle \right\rangle$$
$$= -\int_{\mathbb{R}^n} E(y) \int_{\partial\Omega} u(x)\frac{\partial\psi(x,y)\varphi(x+y)}{\partial\nu_x} ds(x)dy$$

Da für $x \in \partial\Omega$ und $x + y \in \operatorname{supp}\varphi$ ist $\psi(x,y)$ identisch eins.

$$\left\langle \left(\frac{\partial}{\partial\nu}(u\delta_{\partial\Omega})\right) * E, \varphi \right\rangle = -\int_{\mathbb{R}^n} E(y) \int_{\partial\Omega} u(x)\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}(x+y) ds(x)dy$$

$$
\begin{aligned}
&= -\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\partial\Omega} E(y-x)u(x)\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}(y)ds(x)dy \\
&= -\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\partial\Omega} u(x)\frac{\partial}{\partial\nu_y}E(y-x)\varphi(y)ds(x)dy \\
&= \left\langle \int_{\partial\Omega} u(x)\frac{\partial}{\partial\nu_x}E(y-x)ds(x), \varphi(y)\right\rangle
\end{aligned}
$$

Aufgabe 2 **4 Punkte**

a) Berechnen Sie die Fourier-Transformierte $\widehat{H}$ der Heaviside-Funktion.
Tipp: Zeigen Sie zunächst, dass $e^{-\varepsilon x}H \to H$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ für $\varepsilon \to 0$ oder benutzen Sie, dass $H' = \delta$.

b) Berechnen Sie $\widehat{pv\left(\frac{1}{x}\right)}$.
Tipp: Benutzen Sie a) oder $x \cdot pv\left(\frac{1}{x}\right) = 1$.

c) Sei $a \neq 0$ und $f_a(x) = \cos(ax)$: Zeigen Sie, dass

$$f_a'' + a^2 f_a = 0$$

und bestimmen Sie $\widehat{f_a}$.

d) Zeigen Sie, dass $(\log|x|)' = pv\left(\frac{1}{x}\right)$ und berechnen Sie $\widehat{\log|x|}$.

Lösung:
Zu b): Wir beweisen zuerst den Tipp:

$$\left\langle x \cdot pv\left(\frac{1}{x}\right), \varphi\right\rangle = \left\langle pv\left(\frac{1}{x}\right), x\varphi\right\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|\geq\varepsilon}\varphi(x)dx = \int \varphi(x)dx = \langle 1, \varphi\rangle.$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\xi}\mathcal{F}\left(pv\left(\frac{1}{x}\right)\right) &= i\mathcal{F}\left(-xpv\left(\frac{1}{x}\right)\right) = -i\mathcal{F}(1) \overset{\text{VL}}{=} -2\pi i\delta \\
\Rightarrow \quad \mathcal{F}\left(pv\left(\frac{1}{x}\right)\right) &= -2\pi iH + C, \qquad \text{für ein } C \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

Die Distribution $pv\left(\frac{1}{x}\right)$ ist ungerade:

$$\left\langle pv\left(\frac{1}{-x}\right), \varphi\right\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|\geq\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{-x}dx = -\left\langle pv\left(\frac{1}{x}\right), \varphi\right\rangle.$$

Das impliziert, dass $\mathcal{F}\left(pv\left(\frac{1}{x}\right)\right)$ ungerade ist und somit $-2i\pi + C = -C$. $\Rightarrow C = i\pi$.

$$\Rightarrow \quad \mathcal{F}\left(pv\left(\frac{1}{x}\right)\right) = -2\pi iH + \pi i$$

Zu a): Wir wenden die Fouriertransformation auf b) an:

$$pv\left(\frac{1}{x}\right) = -pv\left(\frac{1}{-x}\right) = -(2\pi)^{-1}\mathcal{F}\left(\mathcal{F}\left(pv\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right) = i\mathcal{F}(H) - \frac{i}{2}\mathcal{F}(1) = i\mathcal{F}(H) - i\pi\delta$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{F}(H) = -i\left(pv\left(\frac{1}{x}\right)\right) + \pi\delta$$

Zu c):

$$\mathcal{F}(\cos(ax)) = \mathcal{F}\left(\frac{e^{iax} + e^{-iax}}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\hat{1}(a-\xi) + \hat{1}(a+\xi)\right) = \frac{1}{2}(\delta(a-\xi) + \delta(a+y))$$

Zu d): Wir beginnen mit der Berechnung der Ableitung von $\log|x|$:

$$\begin{aligned}
\left\langle (\log|x|)', \varphi \right\rangle &= -\left\langle \log|x|, \varphi' \right\rangle = -\int_{\mathbb{R}} \log|x|\varphi'(x)dx = -\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|\geq\varepsilon} \log|x|\varphi'(x)dx \\
&= -\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\log|x|\varphi(x)\Big|_{-\infty}^{-\varepsilon} - \int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x}dx + \log|x|\varphi(x)\Big|_{\varepsilon}^{\infty} - \int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{\varphi(x)}{x}dx\right] \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\underbrace{\varepsilon\log\varepsilon}_{\xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0}\underbrace{\frac{\varphi(-\varepsilon)-\varphi(0)}{-\varepsilon}}_{\xrightarrow{\varepsilon\to 0}\varphi'(0)} + \underbrace{\varepsilon\log\varepsilon}_{\xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0}\underbrace{\frac{\varphi(\varepsilon)-\varphi(0)}{\varepsilon}}_{\xrightarrow{\varepsilon\to 0}\varphi'(0)}\right] + \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|\geq\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x}dx \\
&= \left\langle pv\left(\frac{1}{x}\right), \varphi \right\rangle
\end{aligned}$$

Wir nutzen dieses Resultat und das Ergebis aus b):

$$i\xi\mathcal{F}(\log|x|)(\xi) = \mathcal{F}(\partial_x \log|x|) = \mathcal{F}\left(pv\left(\frac{1}{x}\right)\right) = -2\pi i H + \pi i.$$

Multiplikation mit $-ipv\left(\frac{1}{\xi}\right)$ ergibt das Ergebnis

$$\mathcal{F}(\log|x|)(\xi) = pv\left(\frac{1}{\xi}\right)\pi[1-2H]$$

Bitte wenden!

Aufgabe 3 **4 Punkte**

a) Sei u harmonisch in Ω, $x \in \Omega$ und $r > 0$ mit $\overline{B_r(x)} \subset \Omega$. Zeigen Sie, dass

$$u(x) = \frac{n}{r^n \kappa_{n-1}} \int_{B_r(x)} u(y)dy = \frac{n}{\kappa_{n-1}} \int_{B_1(0)} u(x+ry)dy.$$

b) Sei (u_j) eine Folge von harmonischen Funktionen in Ω, die gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von Ω gegen u konvergiert. Zeigen Sie, dass u harmonisch in Ω ist.

c) Es ist bekannt, dass eine Distribution in $\mathbb{R}^n$ mit Träger $\{0\}$ eine Linearkombination

$$\sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha D^\alpha \delta, \quad c_\alpha \in \mathbb{C},$$

der Ableitungen der δ-Distribution ist. Benutzen Sie diese Tatsache um den Satz von Liouville zu beweisen:
Ist u harmonisch in $\mathbb{R}^n$ und

$$|u(x)| \leq C(1 + \|x\|)^N \textit{ für } C, N > 0,$$

so ist u ein Polynom. Insbesondere ist eine harmonische und beschränkte Funktion auf $\mathbb{R}^n$ konstant.

Lösung:
Zu a): Mit der zwiebelartigen Integration und der Mittelwerteigenschaft von harmonischen Funktionen folgt:

$$\int_{B_r(x)} u(y)dy = \int_0^r \int_{S_R(x)} u(y)ds(y)dr \overset{\text{MWE}}{=} \int_0^r R^{n-1}dr = \kappa_{n-1}\frac{r^n}{n}u(x)$$
$$\Rightarrow \quad u(x) = \frac{n}{r^n \kappa_{n-1}} \int_{B_r(x)} u(y)dy \overset{y=x+rz}{=} \frac{n}{\kappa_{n-1}} \int_{B_1(0)} u(x+ry)dy$$

Zu b): Wegen der gleichmäßigen Konvergenz auf kompakten Mengen folgt aus a):

$$u(x) = \lim_{j\to\infty} u_j(x) = \lim_{j\to\infty} \frac{n}{r^n \kappa_{n-1}} \int_{B_r(x)} u_j(y)dy = \frac{n}{r^n \kappa_{n-1}} \int_{B_r(x)} u(y)dy$$

Diese Mittelwerteigenschaft gilt für alle $x \in \Omega$ und $B_r(x) \subset \Omega$ und damit ist u harmonisch.
Zu c): Es gilt $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, denn

$$|\langle u, \varphi \rangle| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |u(x)||\varphi(x)|dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} (1 + \|x\|)^N |\varphi(x)|dx$$

$$\leq C \sup_{y\in\mathbb{R}^n} \left[(1+\|y\|)^{N+n+1}|\varphi(y)|\right] \int_{\mathbb{R}^n} (1+\|x\|)^{-n-1}dx$$
$$\leq \widetilde{C} \sup_{|\beta|\leq N+n+1,\ x\in\mathbb{R}^n} \left|x^\beta\varphi(x)\right|$$

Somit können wir die Fouriertransformation auf u anwenden und erhalten

$$\Delta u = 0 \quad \Rightarrow \quad -|\xi|^2\widehat{u} = 0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{supp}\widehat{u} \subset \{0\} \quad \Rightarrow \quad \widehat{u} = \sum_{|\alpha|\leq m} c_\alpha D^\alpha\delta,\ c_\alpha \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \quad (2\pi)^{-n}u(-x) = \mathcal{F}(\widehat{u}) = \mathcal{F}\left(\sum_{|\alpha|\leq m} c_\alpha D^\alpha\delta\right) = \sum_{|\alpha|\leq m} c_\alpha \mathcal{F}\left(D^\alpha\delta\right) = \sum_{|\alpha|\leq m} c_\alpha x^\alpha \mathcal{F}\left(\delta\right)$$
$$\overset{\mathcal{F}(\delta)=1}{=} \sum_{|\alpha|\leq m} c_\alpha x^\alpha$$
$$\Rightarrow \quad u(x) = (2\pi)^n \sum_{|\alpha|\leq m} (-1)^{|\alpha|}c_\alpha x^\alpha, \text{ also ein Polynom.}$$

Aufgabe 4 **4 Punkte**

a) Seien $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^n$ offen, $u \in \mathcal{D}'(U)$, $\varphi \in \mathcal{D}(U\times V)$ und definiere $\psi : V \to \mathbb{C}$, $\psi(y) = \langle u, \varphi(\cdot, y)\rangle$. Zeigen Sie, dass $\psi \in \mathcal{D}(V)$ und $\partial_y^\alpha\psi(y) = \langle u(x), \partial_y^\alpha\varphi(x,y)\rangle$ für $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$. Falls $u \in \mathcal{E}'(U)$, $\varphi \in \mathcal{E}(U\times V)$. Zeigen Sie, dass $\psi \in \mathcal{E}(V)$.
Anleitung: Für $h = (0,\dots,h_j,\dots,0)$ betrachte
$$\frac{\psi(y+h)-\psi(y)}{h} - \left\langle u, \frac{\partial\varphi}{\partial y_j}(\cdot,y)\right\rangle$$

b) Seien $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ oder $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, $g \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$. Zeigen Sie, dass $u * g$ die Funktion $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ ist, $f(x) = \langle u(y), g(x-y)\rangle$.

c) Sei $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$. Zeigen Sie, dass die Fourier-Transformierte von u die Funktion $\widehat{u} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\widehat{u}(\xi) = \langle u(x), e^{-i\langle x,\xi\rangle}\rangle$ ist.

d) Zeigen Sie, dass $\widehat{\delta_{S_r(0)}}(\xi) = 4\pi r\frac{\sin r|\xi|}{|\xi|}$, wobei $S_r(0)$ die Sphäre mit Radius r um 0 in $\mathbb{R}^3$ ist.
Tipp: Zeigen Sie, dass $\widehat{\delta_{S_r(0)}}(A\xi) = \widehat{\delta_{S_r(0)}}(\xi)$ für $A \in O(3)$ (das heißt $\widehat{\delta_{S_r(0)}}$ ist rotationsinvariant) und folgern Sie, dass
$$\widehat{\delta_{S_r(0)}}(\xi) = \int_{S_r(0)} e^{-ix_1|\xi|}ds(x).$$

Lösung:
Zu a): Es gilt
$$\frac{\psi(y+he_j)-\psi(y)}{h} - \left\langle u, \frac{\partial\varphi}{\partial y_j}(\cdot,y)\right\rangle = \left\langle u(x), \frac{\varphi(x,y+he_j)-\varphi(x,y)}{h} - \frac{\partial\varphi}{\partial y_j}(x,y)\right\rangle =: \langle u, \eta_{y,h}\rangle.$$

Sei $\varphi \in C^\infty(U \times V)$ dann gilt

$$\eta_{y,h}(x) = \frac{\partial \varphi}{\partial y_j}(x, y + \tilde{h} e_j) - \frac{\partial \varphi}{\partial y_j}(x, y) \quad \tilde{h} \in [0, h]$$

Für jedes kompakte K und $m \in \mathbb{N}_0$ impliziert dass

$$\begin{aligned} &\lim_{h \to 0} \sup_{\substack{x \in K \\ |\alpha| \leq m}} \left| \partial_x^\alpha \left[\frac{\varphi(x, y + he_j) - \varphi(x, y)}{h} - \frac{\partial \varphi}{\partial y_j}(x, y) \right] \right| \\ &\qquad = \lim_{h \to 0} \sup_{\substack{x \in K \\ |\alpha| \leq m}} \left| \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \varphi}{\partial y_j}(x, y + \tilde{h} e_j) - \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \varphi}{\partial y_j}(x, y) \right| = 0. \end{aligned}$$

Damit haben wir gezeigt, dass $\eta_{y,h}(x) \overset{h \to 0}{\longrightarrow} 0$ in der $\mathcal{E}(V)$-Norm.
Sei $u \in \mathcal{D}'(U)$ und $\varphi \in \mathcal{D}(U \times V)$. Dann gibt es ein Kompaktum K mit $\operatorname{supp} \eta_{y,h} \subset K$ für alle $h \in (0, 1]$ und $\eta_{y,h} \to 0$ in der $\mathcal{E}(V)$-Norm (siehe oben). Dann impliziert $u \in \mathcal{D}'(U)$, dass $\langle u, \eta_{y,h} \rangle \overset{h \to 0}{\longrightarrow} 0$ und somit die Differenzierbarkeit.
Sei nun $u \in \mathcal{E}'(U)$ und $\varphi \in \mathcal{E}(U \times V)$. Sei $K \subset V$ kompakt und $m \in \mathbb{N}_0$ beliebig. Dann gilt $\eta_{y,h} \to 0$ in der $\mathcal{E}(V)$-Norm (siehe oben). Da $u \in \mathcal{E}'(V)$, impliziert dass $\langle u, \eta_{y,h} \rangle \overset{h \to 0}{\longrightarrow} 0$.
Zu b): Wir berechnen:

$$\begin{aligned} \langle u * g, \varphi \rangle &= \langle g(y), \langle u(x), \varphi(x) \rangle \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} g(y) \langle u(x), \varphi(x) \rangle \, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \langle u(x), g(y) \varphi(x) \rangle \, dy \overset{z = x + y}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \langle u(x), g(z - x) \varphi(z) \rangle \, dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \langle u(x), g(z - x) \rangle \, \varphi(z) dz =: \int_{\mathbb{R}^n} f(z) \varphi(z) dz. \end{aligned}$$

Das $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ folgt aus a) und der Tatsache da $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ bzw. $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ kompakten Träger haben.
Zu c): Wir berechnen

$$\begin{aligned} \langle \widehat{u}, \varphi \rangle = \langle u, \widehat{\varphi} \rangle &= \left\langle u(\xi), \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x, \xi \rangle} \varphi(x) dx \right\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \left\langle u(\xi), e^{-i\langle x, \xi \rangle} \right\rangle \varphi(x) dx \\ &= \left\langle \left\langle u(\xi), e^{-i\langle x, \xi \rangle} \right\rangle, \varphi \right\rangle. \end{aligned}$$

Diese Berechnung funktioniert für $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, da diese Distribution kompakten Träger haben.
Zu d): Für $A \in O(3)$ gilt

$$\widehat{\delta_{S_r(0)}}(A\xi) \overset{c)}{=} \left\langle \delta_{S_r(0)}(x), e^{-i\langle x, A\xi \rangle} \right\rangle = \int_{S_r(0)} e^{-i\langle x, A\xi \rangle} ds(x)$$

$$\stackrel{\det A = 1}{=} \int_{S_r(0)} e^{-i\langle x, \xi \rangle} ds(x) = \widehat{\delta_{S_r(0)}}(\xi)$$

Für ein gegebenes ξ wählen wir A so, dass $A\xi = \|\xi\| e_1$. Dann ist $\langle x, A\xi \rangle = x_1 \|\xi\|$ und

$$\widehat{\delta_{S_r(0)}}(\xi) = \widehat{\delta_{S_r(0)}}(A\xi) = \int_{S_r(0)} e^{-ix_1\|\xi\|} ds(x)$$