Einführung in die partiellen Differentialgleichungen – Sommer 2015
Prof. Dr. George Marinescu / Dr. Frank Lapp
Serie 11 – Abgabe: 7. und 9.7. (in den Übungen)

Aufgabe 1 **4 Punkte**

a) Sei Ω eine offene und beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ und $\rho \in C(\overline{\Omega})$. Sei $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ gegeben durch

$$V(x) = \int_\Omega \rho(y)E(x-y)dy$$

das *Volumenpotential zu* ρ. Zeigen Sie, dass es eine Konstante $C > 0$ gibt mit

$$|V(x)| \leq \sup_{\overline{\Omega}} |\rho| \cdot (1 + \|x\|)^{2-n} \quad \text{und} \quad |\partial_i V(x)| \leq C \sup_{\overline{\Omega}} |\rho| \cdot (1 + \|x\|)^{1-n}$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

b) Sei nun Ω der Klasse C^2 und $\mu \in C(\partial\Omega)$. Sei $W : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ das Doppelschichtpotential,

$$W(x) = \int_{\partial\Omega} \mu(y) \frac{\partial}{\partial \nu_y} E(x-y)ds(y).$$

Zeigen Sie, dass $C > 0$ existiert, so dass für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$|W(x)| \leq C \sup_{\partial\Omega} |\mu| \cdot (1 + \|x\|)^{1-n}.$$

Aufgabe 2 **4 Punkte**

a) Sei $n \geq 3$, $R > 0$ und

$$V(x) = \int_{B_R(0)} \|y\|^3 E(x-y)dy, \ x \in \mathbb{R}^n.$$

Zeigen Sie, dass eine Funktion $a : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ existiert mit $V(x) = a(\|x\|), \ x \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass $a \in C^1([0,\infty)) \cap C^2([0,R) \cup (R,\infty))$ ist und bestimmen Sie V.

b) Sei $\Omega = B_R(x_0), \ n \geq 3$. Bestimmen Sie das Volumenpotential mit Gewicht $\rho \equiv \rho_0$.

Aufgabe 3 **4 Punkte**

Sei $n \geq 3, \ \Omega = B_R(0), \ R > 0$ und $\mu = \mu_0$ konstant. Bestimmen Sie das Einzelschichtpotential V mit Gewicht μ_0. Berechnen Sie

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in -\nu(x_0)}} \frac{\partial V}{\partial \nu}(x), \quad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in \nu(x_0)}} \frac{\partial V}{\partial \nu}(x), \quad \frac{\partial V}{\partial \nu}(x_0), \ x_0 \in S_R(0).$$

Bitte wenden!

Aufgabe 4 **4 Punkte**

Sei $\Omega = B_R(0) \subset \mathbb{R}^2$, $R > 0$. Sei $\varphi \in C(\partial\Omega)$. Zeigen Sie, dass das Dirichlet-Problem

$$\Delta u = 0 \text{ auf } \Omega,\ u = \varphi \text{ auf } \partial\Omega$$

eine eindeutige Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ hat. Zeigen Sie, dass

$$u(x) = \frac{1}{2\pi R} \int_{\|y\|=R} \frac{R^2 - \|x\|^2}{\|x - y\|^2} \varphi(y) ds(y),\ \|x\| < R.$$