Einführung in die partiellen Differentialgleichungen – Sommer 2015
Prof. Dr. George Marinescu / Dr. Frank Lapp
Serie 1 – Abgabe: 21. 4. - 23. 4. (in den Übungen)

Aufgabe 1 **4 Punkte**

a) Sei $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$, $n \geq 2$, gegeben durch

$$u(x) = \begin{cases} \|x\|^{2-n}, & n \geq 3 \\ \log \|x\|, & n = 2 \end{cases}.$$

Zeigen Sie $\Delta u = 0$ auf $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$.

b) Sei $u : \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \to \mathbb{R}$ gegeben durch $u(x,t) = t^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{\|x\|^2}{4t}}$. Zeigen Sie, dass $\partial_t u - \Delta_x u = 0$ auf $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$.

Lösung:
zu a): $n = 2$:

$$\begin{aligned} \Delta u &= \left(\partial_1^2 + \partial_2^2\right) \frac{1}{2} \log(x_1^2 + x_2^2) = \frac{1}{2} \left[\partial_1 \frac{2x_1}{x_1^2 + x_2^2} + \partial_2 \frac{2x_2}{x_1^2 + x_2^2} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{2(x_1^2 + x_2^2) - 4x_1^2}{x_1^2 + x_2^2} + \frac{2(x_1^2 + x_2^2) - 4x_2^2}{x_1^2 + x_2^2} \right] = 0 \end{aligned}$$

$n \geq 3$:

$$\begin{aligned} \Delta u &= \sum_{i=1}^n \partial_i^2 \left(\sum_{j=1}^n x_j^2 \right)^{1-\frac{n}{2}} = \sum_{i=1}^n \partial_i \left[\left(1 - \frac{n}{2}\right) \left(\sum_{j=1}^n x_j^2 \right)^{-\frac{n}{2}} 2x_i \right] \\ &= \sum_{i=1}^n \left[\left(1 - \frac{n}{2}\right) \left(-\frac{n}{2}\right) \left(\sum_{j=1}^n x_j^2 \right)^{-\frac{n}{2}-1} (2x_i)^2 + \left(1 - \frac{n}{2}\right) \left(\sum_{j=1}^n x_j^2 \right)^{-\frac{n}{2}} 2 \right] \\ &= \left(1 - \frac{n}{2}\right) \left(\sum_{j=1}^n x_j^2 \right)^{-\frac{n}{2}-1} \left[-\frac{n}{2} 4 \sum_{i=1}^n x_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_j^2 \right] \\ &= \left(1 - \frac{n}{2}\right) \left(\sum_{j=1}^n x_j^2 \right)^{-\frac{n}{2}} [-2n + 2n] = 0 \end{aligned}$$

zu b):

$$
\begin{aligned}
\partial_t u(x,t) &= \partial_t \left(t^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{\|x\|^2}{4t}} \right) = -\frac{n}{2} t^{-\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{\|x\|^2}{4t}} + t^{-\frac{n}{2}} \frac{\|x\|^2}{4t^2} e^{-\frac{\|x\|^2}{4t}} \\
&= \left(-\frac{n}{2} t^{-1} + \frac{\|x\|^2}{4t^2} \right) t^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{\|x\|^2}{4t}} \\
\Delta_x e^{-\frac{\|x\|^2}{4t}} &= \sum_{i=1}^{n} \partial_i^2 \left(e^{-\frac{\sum_{j=1}^{n} x_j^2}{4t}} \right) = \sum_{i=1}^{n} \partial_i \left(-\frac{2x_i}{4t} e^{-\frac{\sum_{j=1}^{n} x_j^2}{4t}} \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(-\frac{1}{2t} e^{-\frac{\sum_{j=1}^{n} x_j^2}{4t}} + \left(\frac{x_i}{2t} \right)^2 e^{-\frac{\sum_{j=1}^{n} x_j^2}{4t}} \right) = \left(-\frac{n}{2t} + \frac{\|x\|^2}{4t^2} \right) e^{-\frac{\|x\|^2}{4t}} \\
\Rightarrow \Delta_x u(x,t) &= \left(-\frac{n}{2t} + \frac{\|x\|^2}{4t^2} \right) t^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{\|x\|^2}{4t}}
\end{aligned}
$$

Da beide Ausdrücke gleich sind, folgt die Behauptung.

Aufgabe 2 **4 Punkte**

a) Sei $u \in C^2((a,b) \times (c,d))$ mit $\partial_1 \partial_2 u = 0$. Zeigen Sie, dass es $f \in C^2((a,b))$ und $g \in C^2((c,d))$ gibt, so dass $u(x) = f(x_1) + g(x_2)$.

b) Sei $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ mit $\partial_1^2 u - \partial_2^2 u = 0$. Zeigen Sie, dass es $f, g \in C^2(\mathbb{R}^2)$ gibt mit $u(x) = f(x_1 + x_2) + g(x_1 - x_2)$.

Lösung:
Zu a): Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung gilt

$$u(x_1, x_2) = \int_{\frac{a+b}{2}}^{x_1} \partial_1 u(z, x_2) dz + \int_{\frac{c+d}{2}}^{x_2} \partial_2 u(x_1, z) dz + u\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right)$$

Für den Integrand des zweiten Terms $\tilde{g}(x_1, x_2) := \partial_2 u(x_1, x_2)$ gilt

$$\partial_1 \tilde{f}(x_1, x_2) = \partial_1 \partial_2 \tilde{u}(x_1, x_2) = 0.$$

Das zeigt, dass $\tilde{g}$ und somit auch das Integral unabhängig von x_1 ist: Das erste Integral ist unabhängig von x_2, denn:

$$\partial_2 \partial_1 \tilde{u}(x_1, x_2) \overset{\text{Satz von Schwarz}}{=} \partial_1 \partial_2 \tilde{u}(x_1, x_2) = 0.$$

Der dritte Term ist sowieso eine Konstante. Die Funktionen

$$\begin{aligned} f(x_1) &= \int_{\frac{a+b}{2}}^{x_1} \partial_1 u\left(z, \frac{c+d}{2}\right) dz \\ g(x_2) &= \int_{\frac{c+d}{2}}^{x_2} \partial_2 u\left(\frac{a+b}{2}, z\right) dz + u\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) \end{aligned}$$

erfüllen die Forderungen und sind bis auf additive Konstanten eindeutig.
Zu b): Sei $y_1 = x_1 + x_2$ und $y_2 = x_1 - x_2$. Dann gilt

$$x_1 = \frac{y_1 + y_2}{2} \quad \text{und} \quad x_2 = \frac{y_1 - y_2}{2}.$$

Für

$$v(y_1, y_2) := u\left(\frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{y_1 - y_2}{2}\right)$$

gilt

$$\begin{aligned} \partial_{y_1} \partial_{y_2} v(y_1, y_2) &= \partial_{y_1} \left[\partial_{x_1} u\left(\frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{y_1 - y_2}{2}\right) \frac{1}{2} - \partial_{x_2} u\left(\frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{y_1 - y_2}{2}\right) \frac{1}{2}\right] \\ &= \partial_{x_1}^2 u\left(\frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{y_1 - y_2}{2}\right) \frac{1}{4} + \partial_{x_2} \partial_{x_1} u\left(\frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{y_1 - y_2}{2}\right) \frac{1}{4} \\ &\quad - \partial_{x_1} \partial_{x_2} u\left(\frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{y_1 - y_2}{2}\right) \frac{1}{4} - \partial_{x_2}^2 u\left(\frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{y_1 - y_2}{2}\right) \frac{1}{4} \\ &\overset{\text{Satz von Schwarz}}{=} (\partial_{x_1}^2 - \partial_{x_2}^2) u\left(\frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{y_1 - y_2}{2}\right) \frac{1}{4} = 0 \end{aligned}$$

Nach a) gibt es somit $f \in C^2((a,b))$ und $g \in C^2((c,d))$ mit

$$u(x_1, x_2) = v(y_1, y_2) = f(y_1) + g(y_2) = f(x_1 + x_2) + g(x_1 - x_2)$$

Aufgabe 3 **4 Punkte**

Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und $f \in C^\infty(U)$ eine Funktion. Zeigen Sie:

a) $\operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \Delta f$

b) Für $n = 3$ gilt $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = 0$

c) Für $n = 3$ und $F \in C^\infty(U, \mathbb{R}^3)$ ein Vektorfeld gilt $\operatorname{div}(\operatorname{rot} F) = 0$

Lösung:

zu a):

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \sum_{i=1}^{n} \partial_i (\operatorname{grad} f)_i = \sum_{i=1}^{n} \partial_i \partial_i f = \sum_{i=1}^{n} \partial_i^2 f = \Delta f$$

zu b):

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = \begin{pmatrix} \partial_y (\operatorname{grad} f)_z - \partial_z (\operatorname{grad} f)_y \\ \partial_z (\operatorname{grad} f)_x - \partial_x (\operatorname{grad} f)_z \\ \partial_x (\operatorname{grad} f)_y - \partial_y (\operatorname{grad} f)_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_y \partial_z f - \partial_z \partial_y f \\ \partial_z \partial_x f - \partial_x \partial_z f \\ \partial_x \partial_y f - \partial_y \partial_x f \end{pmatrix} \overset{f \in C^2, \text{S.v.Schwarz}}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

zu c):

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\operatorname{rot} F) &= \operatorname{div} \begin{pmatrix} \partial_y F_z - \partial_z F_y \\ \partial_z F_x - \partial_x F_z \\ \partial_x F_y - \partial_y F_x \end{pmatrix} \\ &= \partial_x (\partial_y F_z - \partial_z F_y) + \partial_y (\partial_z F_x - \partial_x F_z) + \partial_z (\partial_x F_y - \partial_y F_x) \\ &= \partial_x \partial_y F_z - \partial_y \partial_x F_z - \partial_x \partial_z F_y + \partial_z \partial_x F_y + \partial_y \partial_z F_x - \partial_z \partial_y F_x \\ &\overset{f \in C^2, \text{S.v.Schwarz}}{=} 0 \end{aligned}$$

Aufgabe 4 **4 Punkte**

Zeigen Sie:

a) Für $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ gilt

$$\partial^\beta x^\alpha = \begin{cases} \frac{\alpha!}{(\alpha-\beta)!} x^{\alpha-\beta}, & \text{falls } \beta \leq \alpha \\ 0, & \text{falls } \beta \nleq \alpha. \end{cases}$$

b) Für $a, u \in C^\infty(\Omega)$ gilt die sogenannte *Leibniz-Regel*:

$$\partial^\alpha(au) = \sum_{\beta \leq \alpha} \frac{\alpha!}{(\alpha-\beta)!\beta!} \partial^\beta a \partial^{\alpha-\beta} u.$$

c) Für $P(\partial) = \sum\limits_{|\alpha| \leq m} c_\alpha \partial^\alpha,\ c_\alpha \in \mathbb{C},\ a, u \in C^\infty(\Omega)$ gilt

$$P(\partial)(au) = \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha a P^{(\alpha)}(\partial) u,$$

wobei $P^{(\alpha)}(\xi) = \partial_\xi^\alpha P(\xi)$.

Lösung:

Zu a): Wir beweisen diese Aussage per Induktion über $m = |\beta|$.

Induktionsanfang $m = 0$: $\partial^0 x^\alpha = x^\alpha = \frac{\alpha!}{(\alpha-0)!} x^{\alpha-0}$

Induktionsschritt: Angenommen die Formel gilt für alle β mit $|\beta| = m$ und für alle α. Sei β beliebig mit $|\beta| = m + 1$. Dann gibt es ein $i \in \mathbb{N}_0^n$ mit $\beta_i > 0$.

$$\begin{aligned} \partial^\beta x^\alpha = \partial_i \partial^{\beta-e_i} x^\alpha &\overset{IB}{=} \partial_i \begin{cases} \frac{\alpha!}{(\alpha-\beta+e_i)!} x^{\alpha-\beta+e_i}, & \text{falls } \beta - e_i \leq \alpha \\ 0, & \text{falls } \beta - e_i \nleq \alpha. \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{\alpha!}{(\alpha-\beta+e_i)!} (\alpha - \beta + e_i)_i x^{\alpha-\beta}, & \text{falls } \beta - e_i \leq \alpha \\ 0, & \text{falls } \beta - e_i \nleq \alpha \end{cases} \end{aligned}$$

Da $\{\beta | \beta \leq \alpha + e_i\} = \{\beta | \beta \leq \alpha\} \cup \{\alpha + e_i\}$ und $\alpha - \beta + e_i = 0$, wenn $\beta = \alpha + e_i$ folgt

$$\partial^\beta x^\alpha = \begin{cases} \frac{\alpha!}{(\alpha-\beta+e_i)!} (\alpha - \beta + e_i)_i x^{\alpha-\beta}, & \text{falls } \beta \leq \alpha \\ 0, & \text{falls } \beta \nleq \alpha \end{cases} = \begin{cases} \frac{\alpha!}{(\alpha-\beta)!} x^{\alpha-\beta}, & \text{falls } \beta \leq \alpha \\ 0, & \text{falls } \beta \nleq \alpha \end{cases}$$

zu b): Induktion über $m = |\alpha|$:

Induktionsanfang:

$$\partial^0(au) = au = \frac{0!}{(0-0)!0!} \partial^0 a \partial^{0-0} u = \sum_{\beta \leq 0} \frac{0!}{(0-\beta)!0!} \partial^\beta a \partial^{0-\beta} u$$

Induktionsschritt: Angenommen die Formel gilt für alle α mit $|\alpha| = m$. Sei α beliebig mit $|\alpha| = m+1$. Dann gibt es ein $i \in \mathbb{N}_0^n$ mit $\alpha_i > 0$.

$$\begin{aligned}
\partial^\alpha(au) = \partial_i \partial^{\alpha-e_i}(au) &\overset{IB}{=} \partial_i \left(\sum_{\beta \le \alpha - e_i} \frac{(\alpha-e_i)!}{(\alpha-e_i-\beta)!\beta!} \partial^\beta a \partial^{\alpha-e_i-\beta} u \right) \\
&\overset{\text{Produktr.}}{=} \sum_{\beta \le \alpha-e_i} \frac{(\alpha-e_i)!}{(\alpha-e_i-\beta)!\beta!} \left[\partial^{\beta+e_i} a \partial^{\alpha-e_i-\beta} u + \partial^\beta a \partial^{\alpha-\beta} u \right] \\
&= \sum_{\beta \le \alpha-e_i} \frac{\alpha!}{(\alpha-(\beta+e_i))!(\beta+e_i)!} \frac{\beta_i+1}{\alpha_i} \partial^{\beta+e_i} a \partial^{\alpha-(\beta+e_i)} u \\
&\quad + \sum_{\beta \le \alpha-e_i} \frac{\alpha!}{(\alpha-\beta)!\beta!} \frac{\alpha_i-\beta_i}{\alpha_i} \partial^\beta a \partial^{\alpha-\beta} u
\end{aligned}$$

Der erste Term wird umsummiert:

$$\partial^\alpha(au) = \sum_{\beta \le \alpha, \beta_i > 0} \frac{\alpha!}{(\alpha-\beta))!\beta!} \frac{\beta_i}{\alpha_i} \partial^\beta a \partial^{\alpha-\beta} u + \sum_{\beta \le \alpha-e_i} \frac{\alpha!}{(\alpha-\beta)!\beta!} \frac{\alpha_i-\beta_i}{\alpha_i} \partial^\beta a \partial^{\alpha-\beta} u$$

Wir können die Summanden mit $\beta_i = 0$ im ersten Term einfach hinzunehmen, da β_i als Faktor auftritt. Im zweiten Term können wir die Summanden mit $\alpha_i - \beta_i = 0$ hinzunehmen, da dieser Faktor im zweiten Term auftritt.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad \partial^\alpha(au) &= \sum_{\beta \le \alpha} \frac{\alpha!}{(\alpha-\beta))!\beta!} \frac{\beta_i}{\alpha_i} \partial^\beta a \partial^{\alpha-\beta} u + \sum_{\beta \le \alpha} \frac{\alpha!}{(\alpha-\beta)!\beta!} \frac{\alpha_i-\beta_i}{\alpha_i} \partial^\beta a \partial^{\alpha-\beta} u \\
&= \sum_{\beta \le \alpha} \frac{\alpha!}{(\alpha-\beta))!\beta!} \partial^\beta a \partial^{\alpha-\beta} u
\end{aligned}$$

*zu c):*Wir berechnen zuerst $P^{(\beta)(\partial)}$:

$$\begin{aligned}
P^{(\beta)}(x) = \partial^\beta P(x) = \partial^\beta \left(\sum_{|\alpha| \le m} c_\alpha x^\alpha \right) &= \sum_{|\alpha| \le m} c_\alpha \partial^\beta x^\alpha \\
&\overset{a)}{=} \sum_{|\alpha| \le m} c_\alpha \begin{cases} \frac{\alpha!}{(\alpha-\beta)!} x^{\alpha-\beta}, & \text{falls } \beta \le \alpha \\ 0, & \text{falls } \beta \not\le \alpha \end{cases} = \sum_{\substack{|\alpha| \le m \\ \alpha \ge \beta}} c_\alpha \frac{\alpha!}{(\alpha-\beta)!} x^{\alpha-\beta}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad P^{(\beta)}(\partial) = \sum_{\substack{|\alpha| \le m \\ \alpha \ge \beta}} c_\alpha \frac{\alpha!}{(\alpha-\beta)!} \partial^{\alpha-\beta}$$

Damit folgt:

$$
\begin{aligned}
P(\partial)(au) &= \sum_{|\alpha|\leq m} c_\alpha \partial^\alpha(au) \overset{\text{Leibnizr. } b)}{=} \sum_{|\alpha|\leq m} c_\alpha \sum_{\beta\leq\alpha} \frac{\alpha!}{(\alpha-\beta)!\beta!} \partial^\beta a \partial^{\alpha-\beta} u \\
&= \sum_{|\beta|\leq m} \frac{1}{\beta!} \partial^\beta a \sum_{\substack{|\alpha|\leq m \\ \alpha\geq\beta}} c_\alpha \frac{\alpha!}{(\alpha-\beta)!} \partial^{\alpha-\beta} u = \sum_{|\beta|\leq m} \frac{1}{\beta!} \partial^\beta a P^{(\beta)}(\partial) u
\end{aligned}
$$