Einführung in die partiellen Differentialgleichungen – Sommer 2015
Prof. Dr. George Marinescu / Dr. Frank Lapp
Serie 2 mit Musterlösungen

Aufgabe 1 **4 Punkte**

a) Sei $\Phi : \Omega_1 \to \Omega_2$ ein C^2-Diffeomorphismus und

$$P(x, \partial_x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\partial_{x_i}\partial_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i \partial_{x_i} + a$$

ein partieller Differentialoperator auf Ω_2. Zeigen Sie, dass ein Operator

$$Q(y, \partial_y) = \sum_{k,l=1}^{n} b_{kl}(y)\partial_{y_k}\partial_{y_l} + \sum_{k=1}^{n} b_k(y)\partial_{y_k} + b$$

auf Ω_1 existiert, so dass für $u \in C^2(\Omega_2)$ gilt

$$Q(y, \partial_y)(u \circ \Phi) = (P(x, \partial_x)u) \circ \Phi.$$

b) Sei $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ und $v \in C^2((0,\infty) \times (0, 2\pi))$ mit $v(\rho, \theta) = u(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$. Zeigen Sie, dass

$$(\partial_1^2 u + \partial_2^2 u)(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = \left(\partial_\rho^2 v + \frac{1}{\rho}\partial_\rho v + \frac{1}{\rho^2}\partial_\theta^2 v\right)(\rho, \theta).$$

Der Operator auf der rechten Seite ist der *Laplace Operator in Polarkoordinaten.*

Lösung:
Zu a): Mit $\Psi = \Phi^{-1}$ und $v = u \circ \Phi$ folgt $u = v \circ \Psi$.

$$\begin{aligned}
\partial_{x_i}(v(\Psi(x))) &= \sum_{k=1}^{n} (\partial_{y_k} v)(\Psi(x))\partial_{x_i}\Psi_k(x) \\
\partial_{x_i}\partial_{x_j}(v(\Psi(x))) &= \partial_{x_i} \sum_{k=1}^{n} (\partial_{y_k} v)(\Psi(x))\partial_{x_j}\Psi_k(x) \\
&= \sum_{k,l=1}^{n} \left[(\partial_{y_l}\partial_{y_k} v)(\Psi(x))\partial_{x_i}\Psi_l(x)\partial_{x_j}\Psi_k(x) + (\partial_{y_k} v)(\Psi(x))\partial_{x_i}\partial_{x_j}\Psi_k(x)\right]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
P(x,\partial_x)(u)\circ\Phi &= P(x,\partial_x)(v\circ\Psi)\circ\Phi \\
&= \sum_{ij} a_{ij} \sum_{k,l} \left[(\partial_{y_l}\partial_{y_k} v)(\partial_{x_i}\Psi_l)(\partial_{x_j}\Psi_k) + \partial_{y_k} v \partial_{x_i}\partial_{x_j}\Psi_k\right]\circ\Phi \\
&\quad + \sum_{ik} a_i(\partial_{y_k} v)(\partial_{x_i}\Psi_k)\circ\Phi + a(v\circ\Psi)\circ\Phi \\
&= \sum_{k,l}\left[\sum_{ij} a_{ij}(\partial_{x_i}\Psi_l)\circ\Phi(\partial_{x_j}\Psi_k)\circ\Phi\right](\partial_{y_l}\partial_{y_k} v)\circ\Phi \\
&\quad + \sum_{k}\left[\sum_{ij} a_{ij}(p_{x_i}\partial_{x_j}\Psi_k)\circ\Phi + \sum_i a_i(\partial_{x_i}\Psi_k)\circ\Phi\right](\partial_{y_k} v)\circ\Phi + av \\
\Rightarrow \qquad b_{kl}(y) &= \sum_{ij} a_{ij}(\partial_{x_i}\Psi_k)(\Phi(y))(\partial_{x_j}\Psi_l)(\Phi(y)) \\
b_k(y) &= \sum_{ij} a_{ij}(\partial_{x_i}\partial_{x_j}\Psi_k)(\Phi(y)) + \sum_i a_i(\partial_{x_i}\Psi_k)(\Phi(y)) \\
b &= a
\end{aligned}
$$

Zu b): Wir nehmen $P = \partial_\rho^2 + \frac{1}{\rho}\partial_\rho + \frac{1}{\rho^2}\partial_\theta^2$. Dann ist $\Psi(\rho,\theta) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$. Anwendung der Formel aus a) ergibt:

$$
\begin{aligned}
b_{11}(\Psi(\rho,\theta)) &= 1(\cos\theta)^2 + \frac{1}{\rho^2}(-\rho\sin\theta)^2 = 1 \\
b_{22}(\Psi(\rho,\theta)) &= 1(\sin\theta)^2 + \frac{1}{\rho^2}(\rho\cos\theta)^2 = 1 \\
b_{12}(\Psi(\rho,\theta)) &= 1\cos\theta\sin\theta + \frac{1}{\rho^2}\rho^2(-\sin\theta)\cos\theta = 0 \\
b_{21}(\Psi(\rho,\theta)) &= b_{12}(\Psi(\rho,\theta)) = 0 \\
b_1(\Psi(\rho,\theta)) &= 1\cdot 0 + \frac{1}{\rho^2}\rho(-\cos\theta) + \frac{1}{\rho}\cos\theta = 0 \\
b_2(\Psi(\rho,\theta)) &= 1\cdot 0 + \frac{1}{\rho^2}\rho(-\sin\theta) + \frac{1}{\rho}\sin\theta = 0 \\
b &= 0
\end{aligned}
$$

Dann impliziert a):

$$
Q(y,\partial_y) = \partial_{y_1}^2 + \partial_{y_2}^2
$$

Die eben gezeigte Beweismethode funktioniert allerdings nur, wenn man schon vorher weiß, wie der Laplace-Operator in Polarkoordinaten aussieht. Hat man diese nicht parat, so braucht man die Umkehrabbildung und ihre Ableitung. Wir geben hier die Rechnung für den ersten Quadranten an, aber die anderen Rechnung unterscheiden sich nur durch eine additive Konstante:

$$\Phi^{-1}(x,y) = \left(\sqrt{x^2+y^2}, \arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right), \quad \Rightarrow \quad d\Phi^{-1}(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{-y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}
b_{11}(x,y) &= 1 \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2 + 1 \cdot \left(\frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2 = \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} = 1 \\
b_{22}(x,y) &= 1 \cdot \left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right)^2 + 1 \cdot \left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)^2 = \frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{1}{x^2+y^2} = \frac{1}{\rho^2} \\
b_{12}(x,y) &= 1 \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right) + 1 \cdot \left(\frac{yx}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) = 0 = b_{21}(x,y) \\
b_1(x,y) &= 1 \cdot \partial_x^2 \rho(x,y) + 1 \cdot \partial_y^2 \rho(x,y) = \frac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{x^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{\rho} \\
b_2(x,y) &= 1 \cdot \partial_x^2 \theta(x,y) + 1 \cdot \partial_y^2 \theta(x,y) = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} - \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} = 0
\end{aligned}$$

Dann impliziert a):

$$Q(y, \partial_y) = \partial_\rho^2 + \frac{1}{\rho^2}\partial_\theta^2 + \frac{1}{\rho}\partial_\rho$$

Aufgabe 2 **4 Punkte**

a) Sei $v \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ ein Vektorfeld und $\phi : \Omega \to \Omega'$ ein Diffeomorphismus. Das Vektorfeld $\Phi_* v \in C^1(\Omega', \mathbb{R}^n)$ wird definiert durch

$$(\Phi_* v)(y) := d\Phi(x) \circ v(x), \;\; x := \Phi^{-1}(y).$$

Zeigen Sie:
$\varphi : I \to \Omega$ ist eine Integralkurve von v genau dann, wenn $\Phi \circ \varphi : I \to \Omega'$ eine Integralkurve von $\Phi_* v$ ist.

b) Sei nun $v \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ das konstante Vektorfeld $v(x) \equiv a \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$. Finden Sie einen Diffeomorphismus $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit $\Phi_* v(x) \equiv (0, \dots, 0, 1)$.

Lösung:
Zu a): „$\Rightarrow$" : Angenommen φ ist eine Integralkurve von v.

$$\begin{aligned}(\Phi \circ \varphi)'(t) &\overset{\text{KR}}{=} d\Phi(\varphi(t))\varphi'(t) = d\Phi(\varphi(t))v(\varphi(t)) \\ &= d\Phi(\Phi^{-1}(\Phi \circ \varphi(t)))v(\Phi^{-1}(\Phi \circ \varphi(t))) \\ &= (\Phi_* v)((\Phi \circ \varphi)(t)) \quad \Rightarrow \quad \Phi \circ \varphi \text{ ist Integralkurve von } \Phi_* v\end{aligned}$$

„$\Leftarrow$" : Angenommen $\Phi \circ \varphi$ ist Integralkurve von $\Phi_* v$.

$$\begin{aligned}\varphi'(t) &= \left(\Phi^{-1} \circ \Phi \circ \varphi\right)'(t) \overset{\text{KR}}{=} d\Phi^{-1}(\Phi \circ \varphi(t))(\Phi \circ \varphi)'(t) \\ (\Phi \circ \varphi)'(t) &= (\Phi_* v)(\Phi \circ \varphi)(t) = d\Phi(\Phi^{-1}((\Phi \circ \varphi)(t)))v(\Phi^{-1}((\Phi \circ \varphi)(t))) \\ &= d\Phi(\varphi(t))v(\varphi(t))\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \varphi'(t) = d\Phi^{-1}(\Phi \circ \varphi(t)) d\Phi(\varphi(t))v(\varphi(t)) \overset{\text{KR}}{=} \underbrace{d(\Phi^{-1} \circ \Phi)}_{=d\mathrm{id}=I_n}(\varphi(t))v(\varphi(t)) = v(\varphi(t))$$

Also ist φ Integralkurve von v.
Zu b): Sei $\{b_1, \dots, b_{n-1}\}$ eine Basis von $a^\perp$. Die lineare Abbildung

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} b_1^T \\ \vdots \\ b_{n-1}^T \\ \frac{a^T}{\|a\|^2} \end{pmatrix} x$$

ist invertierbar, da ihre Spalten eine Basis des $\mathbb{R}^n$ bilden. Die Differenzierbarkeit ist trivial und somit ist Φ ein Diffeomorphismus.

$$\Phi_* v(x) = d\Phi(\Phi^{-1}(x))v(\Phi^{-1}(x)) = \begin{pmatrix} b_1^T \\ \vdots \\ b_{n-1}^T \\ \frac{a^T}{\|a\|^2} \end{pmatrix} a = \begin{pmatrix} \langle b_1, a \rangle \\ \vdots \\ \langle b_{n-1}, a \rangle \\ \frac{\langle a, a \rangle}{\|a\|^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3 **4 Punkte**

Überprüfen Sie, ob die folgenden Funktionen φ_1 bzw. φ_2 erste Integrale der jeweiligen Differentialgleichungssysteme sind

$$\begin{cases} x' = \frac{x^2-t}{y} \\ y' = -x \end{cases} \qquad \varphi_1 = t^2 + 2xy,\ \varphi_2 = x^2 - ty,$$

$$\begin{cases} x' = xy \\ y' = x^2 + y^2 \end{cases} \qquad \varphi_1 = x\log x - x^2 y,\ \varphi_2 = \frac{y^2}{x^2} - 2\log x.$$

Lösung:

zu a):

$$\begin{aligned}
\partial_t \varphi_1(t, x(t), y(t)) &= 2t + 2y(t)x'(t) + 2x(t)y'(t) \\
&\overset{\text{DGL einsetzen}}{=} 2t + 2y(t)\frac{x^2(t) - t}{y(t)} + 2x(t)(-x(t)) \\
&= 2t + 2x^2(t) - 2t - 2x^2(t) \equiv 0 \quad \Rightarrow \text{Ist erstes Integral.}
\end{aligned}$$

Der Übersichtlichkeit halber werden im folgenden die Argumente weggelassen.

$$\begin{aligned}
\partial_t \varphi_2 &= -y + 2xx' - ty' \\
&= -y + 2x\frac{x^2 - t}{y} - t(-x) \neq 0 \quad \Rightarrow \text{Ist } \textit{kein} \text{ erstes Integral.}
\end{aligned}$$

zu b):

$$\begin{aligned}
\partial_t \varphi_1 &= (\log x + 1 - 2xy)x' - x^2 y' = (\log x + 1 - 2xy)xy - x^2(x^2 + y^2) \\
&= xy\log x + xy - 3x^2y^2 - x^4 \neq 0 \quad \Rightarrow \text{Ist } \textit{kein} \text{ erstes Integral.} \\
\partial_t \varphi_2 &= -2\frac{y^2}{x^3}x' - 2\frac{x'}{x} + \frac{2y}{x^2}y' = -2\frac{y^2}{x^3}xy - 2\frac{xy}{x} + \frac{2y}{x^2}(x^2 + y^2) \\
&= -2\frac{y^3}{x^2} - 2y + 2y + \frac{2y^3}{x^2} \equiv 0 \quad \Rightarrow \text{Ist erstes Integral.}
\end{aligned}$$

Aufgabe 4 **4 Punkte**

Lösen Sie die folgenden partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung:

a) $x\dfrac{\partial u}{\partial x} - 2y\dfrac{\partial u}{\partial y} - z\dfrac{\partial u}{\partial z} = 0,$

b) $(x_3x_4 - x_1x_2^2)\dfrac{\partial u}{\partial x_1} + x_2x_3\dfrac{\partial u}{\partial x_2} + x_3^2\dfrac{\partial u}{\partial x_3} + x_3x_4\dfrac{\partial u}{\partial x_4} = 0, \quad x_3 \neq 0.$

Lösung:

zu a): Da das System linear und homogen ist wenden wir Satz 2.2.1 aus der VL an und suchen zwei erste Integrale. Wir bestimmen die Integralkurven des Vektorfeldes

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}'(s) = \begin{pmatrix} x \\ -2y \\ -z \end{pmatrix}(s) \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}(s) = \begin{pmatrix} Ae^{s} \\ Be^{-2s} \\ Ce^{-s} \end{pmatrix}, \quad A, B, C \in \mathbb{R}.$$

Damit sind zwei unabhängige erste Integrale gegeben durch

$$\varphi_1(x, y, z) = xz \quad \text{und} \quad \varphi_2(x, y, z) = x^2y.$$

Die allgemeine Lösung ist dann

$$u(x, y, z) = f(xz, x^2y), \quad \text{für alle } f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}).$$

zu b): Wir bestimmen die Integralkurven des Vektorfeldes (!$x_3 \neq 0$)

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}'(s) = \begin{pmatrix} x_3x_4 - x_1x_2^2 \\ x_2x_3 \\ x_3^2 \\ x_3x_4 \end{pmatrix}(s) \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}(s) = \begin{pmatrix} \frac{D}{B^2} + Ae^{-\frac{B^2}{C-s}} \\ \frac{B}{C-s} \\ \frac{1}{C-s} \\ \frac{D}{C-s} \end{pmatrix}, A, B, C, D \in \mathbb{R}.$$

Damit erhalten wir drei erste Integrale und somit die allgemeine Lösung:

$$u(x_1, x_2, x_3, x_4) = f\left(\frac{x_3}{x_2}, \frac{x_3}{x_4}, \left(x_1 - \frac{x_3x_4}{x_2^2}\right)e^{\frac{x_2^2}{x_3}}\right), \quad \text{für alle } f \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}).$$

Bei $x_3 = 0$ bricht diese Argumentation zusammen, da dann $x_3 \equiv 0$ die Lösung der dritten Komponente ist und dann die Integralkurve

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}(s) = \begin{pmatrix} Ae^{-B^2s} \\ B \\ 0 \\ D \end{pmatrix}$$

ist.