Einführung in die partiellen Differentialgleichungen – Sommer 2015
Prof. Dr. George Marinescu / Dr. Frank Lapp
Serie 3 mit Musterlösungen

Aufgabe 1 **4 Punkte**

Man bestimme alle Lösungen der Differentialgleichungen

a) $(y + xu)\dfrac{\partial u}{\partial x} + (x + yu)\dfrac{\partial u}{\partial y} = u^2 - 1$

b) $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = u - xy$

Lösung:

Zu a): Das charakteristische System ist

$$x' = y + xu, \quad y' = x + yu, \quad u' = u^2 - 1$$

$$\Leftrightarrow \quad (dt =)\frac{dx}{y + xu} = \frac{dy}{x + yu} = \frac{du}{u^2 - 1}$$

Die Eigenschaft der Proportionen sagt aus

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} \quad \Rightarrow \quad \frac{a \pm c}{b \pm d} = \frac{e}{f}.$$

Damit folgt

$$\frac{du}{u^2 - 1} = \frac{dx + dy}{y + xu + x + yu} = \frac{d(x + y)}{(x + y)(u + 1)} \quad \overset{\cdot(u+1)}{\Longrightarrow} \quad \frac{du}{u - 1} = \frac{d(x + y)}{x + y}$$

$$\Rightarrow \quad d\log|u - 1| = d\log|x + y| \quad \Rightarrow \quad d\log\left|\frac{u - 1}{x + y}\right| = 0 \Rightarrow \frac{u - 1}{x + y} = C_1$$

$$\frac{du}{u^2 - 1} = \frac{dx - dy}{y + xu - (x + yu)} = \frac{d(x - y)}{(x - y)(u - 1)} \quad \overset{\cdot(u-1)}{\Longrightarrow} \quad \frac{du}{u + 1} = \frac{d(x - y)}{x - y}$$

$$\Rightarrow \quad d\log|u + 1| = d\log|x - y| \quad \Rightarrow \quad d\log\left|\frac{u + 1}{x - y}\right| = 0 \Rightarrow \frac{u + 1}{x - y} = C_2$$

Damit ist die allgemeine Lösung implizit gegeben durch

$$F\left(\frac{u - 1}{x + y}, \frac{u + 1}{x - y}\right) = 0, \quad F \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}).$$

Zu b): Das charakteristische System ist

$$x' = x, \quad y' = y, \quad u' = u - xy \quad \Leftrightarrow \quad (dt =)\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{du}{u - xy}$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{y} = C_1$$
$$\frac{dy}{y} = \frac{du}{u - xy} \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dy} = \frac{1}{y}u - x = \frac{1}{y}u - C_1 y \quad \overset{\text{GDL}}{\Longrightarrow} \quad z = y(C_2 - C_1 y)$$
$$\Rightarrow \quad C_2 = \frac{z}{y} + C_1 y = \frac{z}{y} + x$$

Damit ist allgemeine die Lösung implizit gegeben durch

$$F\left(\frac{x}{y}, \frac{z}{y} + x\right) = 0, \quad F \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}).$$

Aufgabe 2 **4 Punkte**

Man bestimme die Integralflächen der folgenden Gleichungen, die die Kurven Γ enthalten:

a) $\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial u}{\partial y} = yu$, $\Gamma = \{x = 1, u = y\}$

b) $u\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial u}{\partial y} = y - x$, $\Gamma = \{x = 1, u = y^2\}$

Lösung:

Zu a): Das dazugehörige charakteristische System ist

$$x'(t) = 1, \quad y'(t) = -y(t), \quad z'(t) = y(t)z(t)$$

Daraus ergeben sich die Lösungen:

$$x(t) = t + x(0), \quad y(t) = y(0)e^{-t}$$
$$z'(t) = y(0)e^{-t}z(t) \quad \Rightarrow \quad z(t) = z(0)e^{\int_0^t y(0)e^{-s}ds} = z(0)e^{-y(0)(e^{-s}-1)}$$

Wir wählen die Konstanten so, dass die charakteristischen Kurven die Fläche Γ bei $t = 0$ durchstoßen. Daraus ergeben sich die Anfangsbedingungen:

$$x(0) = 1, \quad y(0) = z(0) := v \in \mathbb{R}$$

und die Lösungen

$$x(t) = t + 1, \quad y(t) = ve^{-t}, \quad z(t) = ve^{-v(e^{-t}-1)}.$$

Sei $(x, y) \in \mathbb{R}^3$ gegeben. Wir suchen t und v so, dass die entsprechende charakteristische Kurve durch diesen Punkt (x, y) geht:

$$t = x - 1, \quad v = ye^t = ye^{x-1}$$

Wir erhalten die gewünschte Lösung u, indem wir die gefundenen v und t in z einsetzen:

$$u(x, y) = z(t) = ve^{-v(e^{-t}-1)} = ye^{x-1}e^{-ye^{x-1}(e^{-(x-1)}-1)} = ye^{x-y-1+ye^{x-1}}$$

Zu b): Das charakteristische System ist

$$x' = z, \quad y' = -z, \quad z' = y - x \quad \Rightarrow \quad (dt =) dx = -\frac{dy}{z} = \frac{dz}{y-x}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad & 0 = dx + dy = d(x+y) \quad \Rightarrow \quad x + y = C_1 \\
& \frac{dz}{dy} = \frac{-y+x}{z} = \frac{C_1 - 2y}{z} \overset{\text{GDL}}{\Longrightarrow} \frac{z^2}{2} = C_1 y - y^2 + C_2 = (x+y)y - y^2 + C_2 = xy + C_2
\end{aligned}$$

Berechnung der Konstanten mit Hilfe der Anfangsbedingungen:

$$\begin{aligned}
& C_1 = x(0) + y(0) = 1 + y_0, \quad \Rightarrow \quad y_0 = x + y - 1 \\
& \frac{y_0^4}{2} = \frac{z(0)^2}{2} = x(0)y(0) + C_2 = y_0 + C_2 \quad \Rightarrow \quad C_2 = \frac{y_0^4}{2} - y_0 \\
\Rightarrow \quad & u(x,y) = z = \sqrt{2xy + y_0^4 - 2y_0} = \sqrt{2xy + (x+y-1)^4 - 2(x+y-1)}
\end{aligned}$$

Es musste die positive Wurzel gewählt werden, da $z(0) = y_0^2 \geq 0$.

Alternativ könnte man die charakteristischen Kurven berechnen:

$$\begin{aligned}
x(t) &= -\frac{y_0 - 1}{2} \cos(\sqrt{2}t) - \frac{y_0^2}{\sqrt{2}} \sin(\sqrt{2}t) + \frac{y_0 + 1}{2} \\
y(t) &= \frac{y_0 - 1}{2} \cos(\sqrt{2}t) + \frac{y_0^2}{\sqrt{2}} \sin(\sqrt{2}t) + \frac{y_0 + 1}{2} \\
z(t) &= \frac{y_0 - 1}{\sqrt{2}} \sin(\sqrt{2}t) + y_0^2 \cos(\sqrt{2}t)
\end{aligned}$$

Allerdings ist es nicht offensichtlich, wie man dann t berechnen soll, ohne den Zusammenhang $z^2 = 2xy + C$ zu haben.

Aufgabe 3 **4 Punkte**

Betrachte das Cauchy-Problem

$$\begin{aligned}
\partial_1 u - x_2^2 \partial_2 u &= 2x_1 - x_2^2 \,, \\
u|_{x_1=0} &= 2x_2 \,.
\end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass es eine eindeutige analytische Lösung in einer Umgebung von $(0,0)$ gibt und bestimmen Sie diese Lösung explizit. Wo ist sie definiert?

Lösung:

Für die Eindeutigkeit benutzen wir den Satz von Cauchy-Kowaleskaja 2.3.1. Mit der Notation dort gilt:

$$a_{(1,0)} \equiv 1, \quad a_{(0,1)}(x_1, x_2) = -x_2^2, \quad a_{(0,0)} = 0, \quad f(x_1, x_2) = 2x_1 - x_2^2$$

und diese Funktionen sind alle in $\mathcal{A}(\mathbb{R}^2)$. $\Gamma = \mathbb{R}^2 \cap \{x_1 = 0\}$ und $a_{(1,0)} \equiv 1 \neq 0$ (Achtung anders als im Satz ist hier $x_1 = 0$, was aber keinen Unterschied macht). Damit gibt es eine Umgebung von $(0,0)$ auf der das Cauchy-Problem eine eindeutige Lösung hat.

Explizite Lösung: Das charakteristische System ist

$$x_1' = 1, \quad x_2' = -x_2^2, \quad z' = 2x_1 - x_2^2 \quad \Rightarrow \quad dx_1 = -\frac{dx_2}{x_2^2} = \frac{dz}{2x_1 - x_2^2}$$

mit den Anfangsbedingungen:

$$x_1(0) = 0, \quad x_2(0) =: x_0, \quad z(0) = u(x_1(0), x_2(0)) = u(0, x_0) = 2x_0.$$

Daraus folgt

$$dx_1 = -\frac{dx_2}{x_2^2} \quad \Rightarrow \quad d(x_1) = d\left(\frac{1}{x_2}\right) \quad \Rightarrow \quad x_1 - \frac{1}{x_2} = C_1$$

$$C_1 = x_1(0) - \frac{1}{x_2(0)} =: -\frac{1}{x_0} \quad \Rightarrow \quad x_0 = -\frac{1}{x_1 - \frac{1}{x_2}} = \frac{1}{\frac{1}{x_2} - x_1}$$

$$-\frac{dx_2}{x_2^2} = \frac{dz}{2x_1 - x_2^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{dx_2} = -\frac{2x_1 - x_2^2}{x_2^2} = -2\frac{C_1 + \frac{1}{x_2}}{x_2^2} - 1 = -2x_2^{-3} - 2C_1 x_2^{-2} + 1$$

$$\Rightarrow \quad z = x_2^{-2} + 2C_1 x_2^{-1} + x_2 + C_2$$

$$C_2 = z(0) - x_2(0)^{-2} - 2C_1 x(0)^{-1} - x(0)_2 = 2x_0 - \frac{1}{x_0^2} - 2\left(-\frac{1}{x_0}\right)\frac{1}{x_0} - x_0 = x_0 + \frac{1}{x_0^2}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{x_2} - x_1} + \left(\frac{1}{x_2} - x_1\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad z = \frac{1}{x_2^2} + 2\left(x_1 - \frac{1}{x_2}\right)\frac{1}{x_2} + x_2 + \frac{1}{\frac{1}{x_2} - x_1} + \left(\frac{1}{x_2} - x_1\right)^2$$

$$= \frac{1}{x_2^2} + 2\frac{x_1}{x_2} - \frac{2}{x_2^2} + x_2 + \frac{x_2}{1 - x_1 x_2} + \frac{1}{x_2^2} - 2\frac{x_1}{x_2} + x_1^2 = x_2 + x_1^2 + \frac{x_2}{1 - x_1 x_2} = u(x_1, x_2)$$

Die Lösung ist definiert auf $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R} \mid x_1 x_2 < 1\}$ dem Gebiet zwischen den Hyperbelästen $x_2 = \frac{1}{x_1}$.

Aufgabe 4 **4 Punkte**

a) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen, $f \in \mathcal{A}(\Omega)$ und $u \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ mit $\partial_1 u + i\partial_2 u = f$ auf Ω. Zeigen Sie, dass $u \in \mathcal{A}(\Omega)$.
(Tip: Betrachten Sie ein geeignetes Cauchy-Problem in der Nähe jedes Punktes.)

b) Sei $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$ mit

$$\partial_1^2 u + \partial_2^2 u = 0 \text{ auf } \mathbb{R}^2\,,$$
$$u(0, x_2) = 0 \text{ für alle } x_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Zeigen Sie, dass $u(-x_1, x_2) = -u(x_1, x_2)$.
(Tipp: $v(x_1, x_2) = u(-x_1, x_2) + u(x_1, x_2)$ erfüllt ein Cauchy-Problem.)

Lösung:

Zu a): Sei $P = (p_1, p_2) \in \Omega$ beliebig. Wir definieren $\rho(x_1, x_2) := x_1 - p_1$. Dann ist $\operatorname{grad}\rho \equiv (1,0)^T \neq 0$ auf $\mathbb{R}^2$ und $p \in \Gamma = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \rho(x_1, x_2) = 0\}$. p ist auch kein charakteristischer Punkt für unseren partiellen Differentialoperator, denn

$$a_{(1,0)}(p_1,p_2)\partial_1\rho(p_1,p_2) + a_{(0,1)}(p_1,p_2)\partial_2\rho(p_1,p_2) = 1 \cdot 1 + i \cdot 0 = 1 \neq 0.$$

Die Koeffizienten $a_{(1,0)} \equiv 1$, $a_{(0,1)} \equiv i$ und f sind analytisch. Dann hat nach Satz 2.4.2 das Cauchy-Problem

$$\begin{aligned} \partial_1 v + i\partial_2 v &= f \text{ auf } \Omega \\ v(p_1, x_2) &= 0, \ (p_1, x_2) \in \Omega \end{aligned}$$

eine eindeutige analytische Lösung v auf einer Umgebung Ω_p von p.

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad (\partial_1 + i\partial_2)(u - v) = f - f = 0 \text{ auf } \Omega_p \\ &\Leftrightarrow \quad \partial_1 \operatorname{Re}(u-v) - \partial_2 \operatorname{Im}(u-v) = 0 \text{ und } \partial_2 \operatorname{Re}(u-v) + \partial_1 \operatorname{Im}(u-v) = 0 \text{ auf } \Omega_p \end{aligned}$$

Damit ist $u - v \in C^1(\Omega)$ und erfüllt die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen auf Ω_p. $u - v$ ist somit holomorph und insbesondere analytisch aud Ω_p. Da v auch analytisch ist, ist auch $u = (u - v) + v$ analytisch in Ω_p. Da p beliebig gewählt war, ist u überall analytisch.

Zu b): Wie im Tipp nehmen wir an, dass $v(x_1, x_2) = u(-x_1, x_2) + u(x_1, x_2)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} [\partial_1^2 + \partial_2^2]v(x_1,x_2) &= [(-1)^2\partial_1^2 u + \partial_2^2 u](-x_1,x_2) + [\partial_1^2 u + \partial_2^2 u](x_1,x_2) \\ &= 0 + 0 = 0 =: f(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} \\ v(0,x_2) &= u(0,x_2) + u(0,x_2) = 0 + 0 = 0 =: \varphi_1(x_2) \quad \forall x_2 \in \mathbb{R} \\ \partial_{x_1} v(x_1,x_2)|_{x_1=0} &= [-\partial_1 u(-x_1,x_2) + \partial_1 u(x_1,x_2)]|_{x_1=0} \\ &= -\partial_1 u(0,x_2) + \partial_1 u(0,x_2) = 0 =: \varphi_2(x_2) \quad \forall x_2 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Die Funktionen $f \equiv 0, \varphi_1 \equiv 0, \varphi_2 \equiv 0$ und die Koeffizienten des Differentialoperators $a_{(2,0)} = a_{(0,2)} = 1$, $a_{(1,1)} = a_{(1,0)} = a_{(0,1)}$ sind alle analytisch. Damit gibt es eine Umgebung Ω_0 von $(0,0)$, in der dieses Cauchy-Problem eindeutig lösbar ist. Damit muss $v \equiv 0$ aud Ω_0 gelten, den null ist offensichtlich auch eine analytische Lösung. v ist auf ganz $\mathbb{R}^2$ harmonisch und somit analytisch. Da $\mathbb{R}^2$ zusammenhängend ist und $v \equiv 0$ auf Ω_0 impliziert die Analytizität $v \equiv 0$ auf ganz $\mathbb{R}^2$ und somit $u(-x_1, x_2) = -u(x_1, x_2)$ für alle $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.