Einführung in die partiellen Differentialgleichungen – Sommer 2015
Prof. Dr. George Marinescu / Dr. Frank Lapp
Serie 4 mit Musterlösung

Aufgabe 1 **4 Punkte**

Bestimmen Sie die Punkte der Kurve

$$\Gamma = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R} \ : \ x_2 = x_1^2\}$$

die charakteristisch für $P = \partial_1 \partial_2$ sind. Zeigen Sie, dass das Cauchy-Problem

$$\partial_1 \partial_2 u = 0, \ u|_\Gamma = 0, \ \partial_2 u|_\Gamma = \varphi_1(x)$$

eine Lösung hat genau dann, wenn $\varphi_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine gerade Funktion ist.

Lösung:
Wir benutzen die Notation von Definition 2.4.1.

$$\Gamma = \{\rho = 0\}, \quad \text{mit } \rho(x_1, x_2) = x_2 - x_1^2, \quad \operatorname{grad} \rho(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} -2x_1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dann ist

$$\sum_{|\alpha|=2} a_\alpha(p) \, (\partial \rho(p))^\alpha = 1 \cdot \begin{pmatrix} -2x_1 \\ 1 \end{pmatrix}^{(1,1)} = -2x_1 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0.$$

Somit ist $(0, 0)$ der einzige charakteristische Punkt auf Γ.

Angenommen das Cauchy-Problem hat eine Lösung. Aus Serie 1 Aufgabe 2 wissen wir, dass die allgemeine Lösung der partiellen Differentialgleichung $\partial_1 \partial_2 u = 0$ die Form

$$u(x_1, x_2) = f(x_1) + g(x_2), \quad f, g \in C^1(\mathbb{R}) \text{ beliebig, hat.}$$

Wertet man die Anfangsbedingungen aus, so erhält man

$$0 = u|_\Gamma(x_1, x_2) = f(x_1) + g(x_1^2)$$
$$\varphi_1(x_1) = \partial_2 u|_\Gamma(x_1, x_2) = g'(x_1^2)$$

Damit gilt

$$\varphi_1(-x_1) = g'((-x_1)^2) = g'(x_1^2) = \varphi_1(x_1), \quad \forall x_1 \in \mathbb{R},$$

das heißt φ_1 ist gerade.

Sei nun angenommen, dass φ_1 gerade ist. Dann gibt es ein $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\varphi_1(x) = \psi_1(x^2)$ $(\psi(y) = \varphi(\sqrt{|x|}))$. Wir setzen

$$u(x_1, x_2) := -\int_0^{x_1^2} \psi(t) dt + \int_0^{x_2} \psi(t) dt = \int_{x_1^2}^{x_2} \psi(t) dt$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}
\partial_1 \partial_2 u(x_1, x_2) &= \partial_1(\psi(x_2)) = 0 \\
u|_\Gamma(x_1, x_2) &= \int_{x_1^2}^{x_1^2} \psi(t) dt = 0 \\
\partial_2 u|\Gamma(x_1, x_2) &= \psi(x_2)|_{x_2 = x_1^2} = \psi(x_1^2) = \varphi_1(x)
\end{aligned}$$

Über Eindeutigkeit der Lösung lassen sich keine Aussagen machen, da φ_1 analytisch nicht vorausgesetzt wurde.

Aufgabe 2 **4 Punkte**

Bestimmen Sie die Punkte der Kurve

$$\Gamma = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R} \ : \ x_2 = x_1^2 \right\}$$

die charakteristisch für $P = \partial_1^2 - \partial_2^2$ sind. Bestimmen Sie auch die Punkte $p \in \Gamma$ wo das Vektorfeld $\lambda \equiv (1,0)$ tangential zu Γ ist. Zeigen Sie, dass das Cauchy-Problem

$$\begin{cases} \partial_1^2 u - \partial_2^2 u = 0 \\ u|_\Gamma = 0, \ \partial_1 u|_\Gamma = \varphi_1(x_1) \end{cases}$$

genau dann eine Lösung hat, wenn $\varphi_1(0) = 0$. Widerspricht das dem Satz von Cauchy-Kowalewskaja?

Lösung:

Wie bei Aufgabe 1 ist

$$\rho(x_1, x_2) = x_2 - x_1^2$$

Dann ist

$$\sum_{|\alpha|=2} a_\alpha(p) \left(\partial \rho(p)\right)^\alpha = 1 \cdot \begin{pmatrix} -2x_1 \\ 1 \end{pmatrix}^{(2,0)} - 1 \cdot \begin{pmatrix} -2x_1 \\ 1 \end{pmatrix}^{(0,2)} = (2x_1)^2 - 2 = 4x_1^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = \pm \frac{1}{2}.$$

Somit sind $(\pm\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ die charakteristischen Punkte auf Γ. λ ist tangential zu Γ in $(0,0)$.

Aus Aufgabe 1, Serie 2 ist bekannt, dass die allgemeine Lösung die Form

$$u(x_1, x_2) = f(x_1 + x_2) + g(x_1 - x_2)$$

Auswerten der Anfangsbedingungen:

$$\begin{aligned}
0 = u|_\Gamma(x_1, x_2) &= f(x_1 + x_1^2) + g(x_1 - x_1^2) \\
\varphi_1(x_1) = \partial_1 u|_\Gamma(x_1, x_2) &= f'(x_1 + x_1^2) + g'(x_1 - x_1^2)
\end{aligned}$$

Ableiten der ersten Gleichung nach x_1

$$0 = f'(x_1 + x_1^2)(1 + 2x_1) + g'(x_1 - x_1^2)(1 - 2x_2)$$

und Abziehen von der unveränderten zweiten Gleichung ergibt

$$2x_1 \left[g'(x_1 - x_1^2) - f'(x_1 + x_1^2)\right] = \varphi_1(x_1)$$

und somit $\varphi_1(0) = 0$. Das ist kein Widerspruch zum Satz von Cauchy-Kowaleskaja, denn es sagt nur aus, dass es keine Lösung um $(0,0)$ geben kann, wenn φ zwar analytisch ist, aber nicht $\varphi(0) = 0$ erfüllt ist. Aber bei $(0,0)$ ist $\lambda \in T_p\Gamma$ und der Satz von Cauchy-Kowaleskaja macht dort keine Aussage.

Durch Umstellen der Gleichungen für f' und g' erhalten wir die Funktion

$$\begin{aligned}
u(x_1, x_2) = {} & \chi\left(x_1 + x_2 \geq -\frac{1}{4}\right) \Phi\left(-\frac{1}{2} + \operatorname{sgn}\left(x_1 + \frac{1}{2}\right)\sqrt{\frac{1}{4} + x_1 + x_2}\right) \\
& - \chi\left(x_1 - x_2 \leq -\frac{1}{4}\right) \Phi\left(\frac{1}{2} + \operatorname{sgn}\left(x_1 - \frac{1}{2}\right)\sqrt{\frac{1}{4} - (x_1 - x_2)}\right) \\
& \text{wobei } \Phi(x) = \int_0^x \frac{4z^2 - 1}{4z}\, \varphi_1(z) dz
\end{aligned}$$

Das ist eine Lösung von $\partial_1^2 - \partial_2^2 = 0$, denn es hat die Form $f(x_1 + x_2) + g(x_1 - x_2)$. Außerdem gilt

$$\begin{aligned}
u(x_1, x_1^2) &= \Phi(x_1) - \Phi(x_1) = 0 \\
\partial_1 u(x_1, x_1^2) &= \Phi'(x_1)\frac{\operatorname{sgn}\left(x_1 + \frac{1}{2}\right)}{2\sqrt{\frac{1}{4} + x_1 + x_1^2}} + \Phi'(x_1)\frac{\operatorname{sgn}\left(x_1 - \frac{1}{2}\right)}{2\sqrt{\frac{1}{4} - (x_1 - x_1^2)}} \\
&= \frac{4x_1^2 - 1}{4x_1}\varphi_1(x_1)\left(\frac{1}{2x_1 + 1} + \frac{1}{2x_1 - 1}\right) = \varphi_1(x_1)
\end{aligned}$$

Somit handelt es sich um eine Lösung des Cauchy-Problems.

Aufgabe 3 **4 Punkte**

Sei

$$P(x, \partial) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\partial_i\partial_j + \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\partial_i + a(x),$$

wobei $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $a_i, a \in C(\Omega, \mathbb{R})$, und die Matrix $A = (a_{ij})$ ist symmetrisch. Sei $k_+ \in \{0, \ldots, n\}$ die Anzahl positiven Eigenwerte von A und $k_- \in \{0, \ldots, n\}$ die Anzahl der negativen Eigenwerte von A.

Figure 1:

Zeigen Sie, dass ein Matrix $C \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ existiert, so dass durch die Koordinatentransformation $y = C^T x$ der Operator $P(x, \partial)$ in den Operator

$$Q(y, \partial) = \sum_{i=1}^{k_+} \partial_i^2 - \sum_{i=k_++1}^{k_++k_-} \partial_i^2 + \sum_{i=1}^{n} b_i(y)\partial_i + b(y)$$

transformiert (siehe Aufgabe 1, Blatt 2).

Lösung:
Sei

$$D = \mathrm{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_{k_+}, \underbrace{-1, \dots, -1}_{k_-}, 0, \dots, 0) \in M_{n\times n}(R).$$

Nach dem Trägheitssatz von Sylvester (Diesen Satz kann man mit der orthogonalen Diagonalisierbarkeit von symmetrischen Matrizen leicht herleiten. Er ist aber eigentlich deutlich elementarer) gibt es eine Matrix $C \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})$ mit $C^T AC = D$. Damit definieren wir die Transformation $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit $\Phi(x) := C^T x$. Dann gilt nach Aufgabe 1 Blatt 2:

$$Q(y, \partial_y) = \sum_{k,l=1}^{n} b_{kl}(y)\partial_{y_k}\partial_{y_l} + \sum_{k=1}^{n} b_k(y)\partial_{y_k} + b$$

mit

$$\begin{aligned}
b_{kl}(y) &= \sum_{ij} a_{ij}(\partial_{x_i}\Phi_k)(\Phi^{-1}(y))(\partial_{x_j}\Phi_l)(\Phi^{-1}(y)) \\
&= \sum_{ij} a_{ij} C^T_{ki} C^T_{lj} = \sum_{ij} C^T_{ki} a_{ij} C_{jl} = D_{kl} \\
b_k(y) &= \sum_{ij} a_{ij}(\partial_{x_i}\partial_{x_j}\Phi_k)(\Phi^{-1}(y)) + \sum_{i} a_i(\Phi^{-1}(y))(\partial_{x_i}\Phi_k)(\Phi^{-1}(y)) \\
&= \sum_{ij} a_{ij} \cdot 0 + \sum_{i} a_i(\Phi^{-1}(y)) C^T_{ki} = (C^T a(\Phi^{-1}(y)))_k \\
b(y) &= a(\Phi^{-1}(y))
\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
Q(y, \partial_y) &= \sum_{k,l=1}^{n} D_{kl}\partial_{y_k}\partial_{y_l} + \sum_{k=1}^{n} (C^T a)\partial_{y_k} + a \\
&= \sum_{k=1}^{k_+} \partial_{y_k}^2 - \sum_{k=k_++1}^{k_++k_-} \partial_{y_k}^2 + \sum_{k=1}^{n} (C^T a(\Phi^{-1}(y)))_k \partial_{y_k} + a(\Phi^{-1}(y))
\end{aligned}$$

Aufgabe 4 **4 Punkte**

Lösen Sie die nichtlineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2 - 3x_1^2 - 1 = 0 \quad \text{in } U = \{x_1 > 0\}$$
$$u(x_1, x_2) = x_2 \quad \text{auf } \Gamma = \{x_1 = 0\}.$$

Tipp: Betrachten Sie die letzte Aufgabe auf Übung 2.

Lösung:

Wie in Übung 2 stellen wir das System der Charakteristiken auf.

$$F(p, z, x) = p_1 + p_2^2 - 3x_1^2 - 1$$

$$\begin{cases} p' = \partial_z F p - \operatorname{grad}_x F = 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -6x_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x_1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ z' = \langle \operatorname{grad}_p F, p \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2p_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \right\rangle = p_1 + 2p_2^2 \\ x' = \operatorname{grad}_p F = \begin{pmatrix} 1 \\ 2p_2 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Wir bestimmen die Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} x(0) \in \Gamma \quad &\Rightarrow \quad x_1(0) = 0, \quad x_2(0) =: x_0 \\ p_2(0) &= \partial_2 u(x(0)) = \partial_2 u(0, x_0) = \partial_2 x_2|_{(0,x_0)} = 1 \\ p_1(0) + p_2^2(0) &= 3x_1^2(0) + 1 = 1 \ \Rightarrow \ p_1(0) = -p_2^2(0) + 1 = -1 + 1 = 0 \\ z(0) &= u(x(0)) = u(0, x_0) = x_0 \end{aligned}$$

Dieses Anfangswertproblem wird schrittweise gelöst:

$$\begin{aligned} p_2' = 0 \quad &\Rightarrow \quad p_2(t) = p_2(0) = 1 \\ x_1' = 1 \quad &\Rightarrow \quad x_1(t) = t + x_1(0) = t \\ p_1'(t) = 6x_1(t) = 6t \quad &\Rightarrow \quad p_1(t) = 3t^2 + p_1(0) = 3t^2 \\ x_2' = 2p_2 = 2 \quad &\Rightarrow \quad x_2(t) = 2t + x_2(0) = 2t + x_0 \\ z'(t) = p_1(t) + 2p_2^2(t) = 3t^2 + 2 \quad &\Rightarrow \quad z(s) = \int_0^t 2s^2 + 2ds + z(0) = t^3 + 2t + x_0 \end{aligned}$$

Angenommen $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ beliebig aber fest gewählt. Dann folgt

$$(x_1, x_2) = (t, 2t + x_0) \quad \Rightarrow \quad t = x_1, \ x_0 = x_2 - 2t = x_2 - 2x_1.$$

Damit folgt

$$u(x_1, x_2) = z(t) = t^3 + 2t + x_0 = x_1^3 + 2x_1 + x_2 - 2x_1 = x_1^3 + x_2.$$